

Резюмета

на

научните публикации на доц. дн Петьо Савов Келеведжиев,
ДКПРУ-Сливен, Технически университет-София,

за

участие в конкурса за а.д. „професор“ по
професионално направление 4.5. Математика,
специалност „Диференциални уравнения“

За рецензиране в конкурса са представени 8 публикации, от които 5 са в списания с IF (**B4,1; Г7,1-4**) и 3 в списания със SJR (**B4,2; 3,1-2**).

Във включените публикации се изследва разрешимостта на гранични задачи (четириточкова в **3,1** и двуточкови в останалите статии) за нелинейни обикновени диференциални уравнения от втори, трети и четвърти ред. При това не се използват класически инструменти като техниката на горно и долно решение, ръстови условия от тип Nagumo и условия тип Agarwal-O'Regan, изискващи непроменлив знак на основната нелинейност на уравнението. За получаване на резултатите за съществуване на решение е използван топологичен метод (с изключение на резултатите от **3,1**), т.е. въпросът за съществуване на решение на конкретна гранична задача е заменен с проблема за съществуване на неподвижна точка на подходящо въведен оператор. Наличието на неподвижна точка се подсигурява от топологичната трансверзална теорема на А. Granas. Подготовката по прилагане на тази теорема изисква конструиране на еднопараметрична фамилия гранични задачи, като параметърът λ се мени в интервала $[0,1]$. Фамилията е такава, че при $\lambda = 0$ се получава тривиално разрешима гранична задача, а при $\lambda = 1$ – изследваната гранична задача. Операторният вид на тази фамилия е хомотопията от трансверзалната теорема. Изискваните свойства на хомотопията (компактност и липса на неподвижни точки по границата на множеството, върху което действа) „пренасят“ непрекъснато по параметъра λ разрешимостта, което в частност гарантира разрешимост и на изследваната задача. Наличието на необходимите свойства на хомотопията зависи и от множеството U , върху което тя действа. То се дефинира с помощта на априорни оценки за евентуалните решения на фамилията гранични задачи, а за подсигуряване на тези оценки основно е използвана техниката на бариерните ивици, въведена в [P. Kelevedjiev, Existence of solutions for two-point boundary value problem, Nonlinear Analysis 22 (1994), 217-224]. Бариерната ивица е

подмножество на дефиниционната област на основната нелинейност на диференциалното уравнение, в което тя не си променя знака. Подходящ комплект от две или четири бариерни ивици подsigуряват априорна оценка за $(k - 1)$ -те производни на евентуалните решения на λ -семията, конструирана за гранична задача от k -ти ред. Прилагането на комплект бариерни ивици е възможен, ако $(k - 1)$ -те производни имат една и съща известна стойност в някаква стойност на променливата, най-често в край на интервала, в който се разглежда граничната задача.

В част от статиите (3,2; B4,1; B4,2; Г7,4) не се прилага директно трансверзалната теорема, а глобална теорема за съществуване, доказана чрез нея.

Резюметата са групирани по отношение на реда на диференциалното уравнение. Номерацията на статиите съответства на тази от представената „Справка за минималните изисквания“.

I. Разрешимост на гранични задачи за ОДУ от втори ред

3,2. P. Kelevedjiev, *Solvability of a second-order singular boundary-value problem, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2012(2012), No. 99, 1-8. (Scopus, SJR: 0.579) <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2012/99/kelevedjiev.pdf>*

Първо се изследва несингулярна гранична задача за общо нелинейно уравнение от втори ред, решено спрямо втората производна. Независимата променлива се мени в интервал от вида (a, b) . По отношение на зависимите променливи, основната нелинейност на уравнението може да е дефинирана в ограничени множества. Граничните условия включват зададена стойност на първата производна в левия край на интервала $t = a$ (това дава възможност да се използва техниката на бариерните ивици) и линейна комбинация от стойностите на неизвестната функция и нейната първа производна в десния край на интервала $t = b$. Чрез описания по-горе подход, е получена теорема за съществуване на $C^2[a, b]$ -решение на разглежданата несингулярна задача.

В интервала $(0,1)$ е изследвана гранична задача, сингулярна в $t = 0$, т.е. дясната страна на уравнението, разглеждана като функция на независими променливи, е неограничена при $t \rightarrow 0^+$. За $n \in \mathbb{N}$, в интервали от вида $(n^{-1}, 1)$ е разглеждана n -параметрична фамилия от несингулярни гранични задачи. Получената вече теорема гарантира решение $x_n \in C^2[n^{-1}, 1]$ за всяка несингулярна задача от n -фамилията. С помощта на теоремата на Arzela-Ascoli се установява, че редицата $\{x_n\}$ притежава равномерно сходяща подредица, чиято граница е $C^1[0,1] \cap C^2(0,1)$ -решение на сингулярната задача.

Г7,1. *P. Palamides, P. Kelevedjiev and N. Popivanov, On the solvability of a Neumann boundary value problem for the differential equation $f(t, x, x', x'') = 0$, Boundary Value Problems 2012, 77(2012). (Web of Science, Q1) <https://doi.org/10.1186/1687-2770-2012-77>*

Разглежда се несингулярна гранична задача за общо нелинейно уравнение от втори ред. Граничните условия включват зададени стойности на първата производна в краищата на интервала $[0,1]$. Уравнението не е решено спрямо втората производна. Това и липсата на зададена гранична стойност на самото решение създават допълнителни затруднения и налагат наред с условия от бариерен тип, да се използват и условия, които гарантират априорни оценки за евентуалните решения на конструираната λ -параметрична фамилия гранични задачи. В тях се изисква лявата страна на уравнението $f(t, x, p, q)$ да е диференцируема по x и q и производните да са с подходящ непроменлив знак.

Г7,2. *P.S. Kelevedjiev and S. Tersian, The barrier strips technique for a boundary value problem with p -Laplacian, Electronic Journal of Differential Equations Vol. 2013 (2013), No. 28, pp. 1-8. (Web of Science, Q3) <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2013/28/kelevedjiev.pdf>*

Разглежда се гранична задача за уравнение от втори ред с p -Laplacian, т.е. лявата страна има вида $(\phi_p(x'))'$, където $\phi_p(s) = s|s|^{p-1}$, а $p \in (1,2]$. Дясната страна на уравнението е нелинейна функция на независимата променлива, на неизвестната функция и на нейната първа производна. По отношение на зависимите променливи, основната нелинейност (дясната страна) на уравнението може да е дефинирана в ограничени множества. Граничните условия са от смесен тип – в левия край на интервала е зададена стойност на неизвестната функция, а в десния на нейната първа производна. Наложено е условие от бариерен тип, което подsigурява априорни оценки първо за първите производни на евентуалните $C^2[0,1]$ -решения на конструираната λ -параметрична фамилия, а като следствие от тях и априорни оценки за самите решения. Показано е, че при подходящи бариерни ивици гарантираното $C^2[0,1]$ -решение притежава важни свойства, то е положително и монотонно.

Г7,3. *P. Kelevedjiev and S. Bojerikov, On the solvability of a boundary value problem for p -Laplacian differential equations, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 2017, No. 8, 1–9. (Web of Science, Q2) <http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/p5305.pdf>*

Разглежда се граничната задача от предходната статия **Г7,2**, но за $p > 2$. В този случай зададената стойност на първата производна в $t = 1$ е не по-малка от

1. Наложени са и допълнителни изисквания към бариерните ивици, което налага различен технически подход. Полученият резултат за разрешимост гарантира строго растящо решение.

II. Разрешимост на гранични задачи за ОДУ от трети ред

B4,1. *P. Kelevedjiev and T. Z. Todorov, Existence of solutions of nonlinear third-order two-point boundary value problems, Electron. J. Qual. Theory of Differ. Equ. 2019, No. 23, 1-15. (Web of Science, Q1)*
<http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/p7268.pdf>

Разглеждат се несингулярни гранични задачи за най-общи нелинейни диференциални уравнения от трети, решени спрямо третата производна. Дясната страна на уравнението може да бъде дефинирана в ограничено множество. Получените достатъчни условия гарантират поне едно решение в $C^3[0,1]$, което удовлетворява групи от по три гранични условия. Всяка група включва зададена стойност на втората производна в началото на интервала. Това позволява основното предположение да изисква наличие на бариерни ивици за втората производна на решенията на λ - фамилията. То подсигурава всички необходими априорни оценки. Доказани са и теореми, които гарантират положителни или неотрицателни, монотонни, изпъкнали или вдлъбнати решения на разглежданите гранични задачи.

B4,2. *R. P. Agarwal, P. Kelevedjiev and T. Z. Todorov, On the solvability of nonlinear third-order two-point boundary value problems, Axioms 2020, 9(2), 62. (Scopus, SJR: 0.355) <https://doi.org/10.3390/axioms9020062>*

Разглеждат се несингулярни гранични задачи за най-общи нелинейни диференциални уравнения от трети, решени спрямо третата производна. Граничните условия са два вида. Единият вид включва зададена стойност на втората производна в $t = 1$ и или зададени стойности на решението в $t = 0$ и $t = 1$, или зададени стойности на решението и неговата първа производна в краищата на интервала $[0,1]$. В другия вид гранични условия не е зададена стойност на втората производна. Разрешимостта в $C^3[0,1]$ на първия вид гранични задачи следва от наложено бариерно условие, но различно от това в предходната статия **B4,1**. Разрешимостта на втория тип гранични задачи следва от комбинация на условията, наложени в тази статия и в **B4,1**. За всяка от разглежданите задачи са

доказани теореми, които гарантират положителни или неотрицателни, монотонни, изпъкнали или вдлъбнати решения.

III. Разрешимост на гранични задачи за ОДУ от четвърти ред

Г7,4. *R. P. Agarwal and P. S. Kelevedjiev, On the solvability of fourth-order two-point boundary value problems, Mathematics 2020, 8(4), 603. (Web of Science, Q1)*
<https://doi.org/10.3390/math8040603>

Разглеждат се множество несингулярни гранични задачи за най-общи нелинейни диференциални уравнения от четвърти ред, решени спрямо четвъртата производна. По отношение на зависимите променливи, дясната страна на уравнението може да е дефинирана в ограничени множества. Доказаните достатъчни условия гарантират поне едно решение в $C^4[0,1]$, което удовлетворява набор от по четири гранични условия. Всеки набор включва зададена стойност на третата производна в $t = 1$. Основното предположение изисква наличие на бариерни ивици за третата производна на решенията на λ -фамилията. Следствие от него са всички необходими априорни оценки. Доказани са и теореми, гарантиращи не само положителни решения, но и такива, които са монотонни и с подходяща кривина.

3,1. *P. Kelevedjiev, P. Palamides and N. Popivanov, Another understanding of fourth-order four-point boundary-value problems, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2008(2008), No. 47, 1-15. (Scopus, SJR: 0.639)*
<https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2008/47/kelevedjiev.pdf>

Изследвана е разрешимостта на несингулярна задача за уравнение от четвърти ред, решено спрямо четвъртата производна. Дясната страна на уравнението е функция на независимата променлива, на неизвестната функция и на нейната втора производна. Граничните условия са четириточкови, освен, че се изисква стойностите на решението в краищата на интервала $[0,1]$ да са нула, наложени са и линейни комбинации върху стойностите на втората и третата производна в две различни вътрешни точки. Предполага се, че дясната страна на уравнението, разглеждана като функция на независими променливи, е неположителна, асимптотично линейна в безкрайността и свръхлинейна в координатното начало. Като се използват теоремата на Knesser и свойства на векторното пространство, се установява, че разглежданата гранична задача притежава положително или отрицателно решение.

