

РЕЦЕНЗИЯ

на дисертационен труд

Броящи вероятности разпределения и приложения в модели на риск

за присъждане на образователната и научна степен „Доктор“,
Област 4. Природни науки, математика и информатика,
Професионално направление 4.5. Математика, Научна специалност
„Математическо моделиране и приложения на математиката“

Автор: **Меглена Делчева Лазарова**,
Докторант на самостоятелна подготовка към
катедра „Математическо моделиране и числени методи“,
Факултет по приложна математика и информатика,
Технически университет - София
Научен ръководител: Професор д-р Михаил Тодоров, ТУ-София

Рецензент: Професор д-р Николай М. Янев, ИМИ-БАН

1. Основни сведения.

Представеният дисертационен труд е на български език и съдържа 161 страници текст, от които 9 стр. са библиография с 84 заглавия. Освен това е представен Автореферат (на български език) с 31 стр. текст, от които 6 стр. са библиография със същите 84 заглавия като в дисертацията.

Авторката е **Меглена Делчева Лазарова** е докторант на самостоятелна подготовка към катедра „Математическо моделиране и числени методи“, Факултет по приложна математика и информатика, Технически университет – София, научен ръководител професор д-р Михаил Тодоров, ТУ-София. През 1997-2002 г. следва във ФМИ – СУ и завършва като магистър по математика, а получава и втора специалност като учител по математика и информатика. През 2002-2003г. е преподавател по информатика в Първа английска езикова гимназия в София. През 2006-2009 г. е главен експерт в Държавната агенция за младежта и спорта. От 28.02.2011 до 28.02.2015 г. е асистент в катедра „Математика“ към УНСС в София, от 11.03.2015 до 11.09.2015 е преподавател в катедра ВОИС към ФМИ на СУ. От 26.09.2016 г. е асистент в катедра „Математически анализ и диференциални уравнения“ към Факултет по приложна математика и информатика, Технически университет – София.

Журито е назначено със заповед ОЖ-4.5-07/17.06.2021 на Ректора на ТУ – София. Предзащитата на дисертационния труд е проведена във ФПМИ на ТУ на 16.06.2021 г. Документацията и всички процедури по защитата са в съответствие с изисванията на закона и съответните правилници.

2. Структура, анализ, научни и научно-приложни приноси на дисертационния труд.

Представеният дисертационен труд съдържа 161 страници машинописен текст, дадени в 6 глави, библиография, основни приноси в дисертацията, публикации и доклади и декларация за оригиналност.

В Глава 1 (която се нарича Въведение и заема 35 стр.) са представени основните модели на риск, вероятностни разпределения в теория на риска, броящи процеси в теория на риска, а в последния параграф 4 е разгледана основната структура на дисертацията. Тази глава е добре конструирана и остава отлично впечатление и със своето историческо въведение и изложение. В Глава 2 са дефинирани четири вероятностни разпределения, за които са намерени вероятностни и пораждащи функции, моменти и рекурсии. В Глава 3 са определени два нови броящи процеса, за които са намерени вероятностните и пораждащи функции, моменти и се изследват някои свойства. В Глава 4 се въвеждат два модела на риск като се използват броящите процеси от предната глава. Получени са редица интересни резултати. В Глава 5 се въвеждат и изследват обобщени двумерни разпределения, за които се доказват редица свойства. В Глава 6 (Заклучение) се прави анализ на получените резултати. Библиографията от 9 страници съдържа 84 названия. Представени са подробно 9 основни приноси, списък на 6 публикации по дисертацията и 14 изнесени доклада.

Ще се спрем малко по-подробно на някои от получените в дисертацията резултати.

В Глава 2 всъщност са дефинирани и изследвани следните нови вероятностни разпределения:

- (1) I-Delaporte разпределение (Delaporte разпределение с инфлационен параметър);
- (2) Нецентрирано разпределение на Пойа-Аепли;
- (3) Разпределение на Пойа-Аепли-Линдли;
- (4) Разпределение на Пойа-Аепли от ред k – втори тип.

За тези разпределения са дадени пораждащите функции и съответните разпределения, моментите, рекурентни формули за вероятностите, а също са предствени и интересни компютърни графики.

Да отбележим, че (1) се получава от рандомизация на основния параметър λ чрез изместено Γ -разпределение. Всъщност почти навсякъде в дисертацията вмесно понятието рандомизация се използва понятието «смесване», което не звучи много удачно. В Твърдение 2.1 и Следствие 2.1 са намерени интересни рекурентни формули за вероятностната функция. Да отбележим, че в дисертацията понятието вероятностна функция всъщност означава съответно дискретно разпределение (като последното понятие по-често се използва в българската литература).

От друга страна, (2) се дефинира като сума на независими случайни величини, разпределени съответно Пойа-Аепли и Поасоново, а в Твърдение 2.2 и Следствие 2.2 са представени рекурентни формули за вероятностната функция. Намерен е и съответния индекс на Фишер, който се явява *under-dispersed* по отношение на Пойа-Аепли и *over-dispersed* по отношение на Поасоновото разпределение.

Рандомизация на параметъра λ в разпределението на Пойа-Аепли относно разпределение на Линдли води до (3), което от своя страна може да се представи като разпределение на сума на две независими случайни величини със сложно геометрично разпределение, едната от които има и атом в нулата. Твърдение 2.3 и Следствие 2.3 предлагат рекурентни формули за вероятностната функция. Намерен е и индексът на Фишер.

В (3) т.н. усложняващи случайни величини имат специфично разпределение, което се получава от геометричното, спряно до някаква крайна стойност k , в която се концентрира цялата вероятностна маса, която остава до безкрайност. Пораждащата функция на (3) е дадена в (2.29), а в Твърдение 2.4 и Следствие 2.4 са представени съответни рекурентни формули за вероятностите.

Забележка 1: В Глава 2 са дадени и 4 леми без доказателство и обяснение към тях.

В Глава 3 са дефинирани следните т.н. обобщени процеси на Пойа-Аепли:

(А) Нецентриран процес на Пойа-Аепли;

(В) Процес на Пойа-Аепли от ред k – втори тип.

Да отбележим, че разпределенията на двата процеса са свързани със съответните разпределения (2) и (4) от предната Глава 2. Процесите са дефинирани чрез съответните си инфинитезимални характеристики (3.4) и (3.9) и са намерени съответните системи от диференциални уравнения на

Колмогоров (3.5) и (3.10), от които следват и съответните пораждащи функции за процесите.

Забележка 2: За така приведените без доказателства Лема 3.1 и Лема 3.2 освен това няма никакви коментarii в Глава 3.

В Глава 4 процесите (A) и (B), разглеждани в Глава 3, се прилагат като броящи процеси в класическия модел на риск, дефиниран в (1.1). Изследват се вероятностите за фалит $\Psi(u)$ с начален капитал $u \geq 0$, коефициентите на натрупване θ и съответните функции $G(u, y)$ (въведени от Gerber et al., 1987), които зависят от времето до фалит $\tau(u)$ и дефицита в момента на фалит $D = |u + X(\tau(u))|$. За $G(u, y)$ са получени интегродиференциални уравнения (4.4) и (4.12), съответно при броящ процес (A) и при броящ процес (B). Съответно в Теорема 4.1 и Теорема 4.4 се представят функциите $G(0, y)$ чрез съответните функции на разпределение на натрупаните искове (4.5) и (4.13). Намерени са също уравнения за вероятностите за фалит, съответно (4.7) и (4.15). Получени са в явен вид съответните вероятности за фалит при нулев начален капитал (Теорема 4.3 и Теорема 4.6). В §4.1.1 и §4.2.1 е показано, че при експоненциално разпределени искове всички така дефинирани по-горе характеристики могат да бъдат експлицитно пресметнати.

В Глава 5 се въвежда и изследва един клас от обобщени двумерни разпределения, които биха могли да бъдат използвани като броящи процеси при двумерни модели на риск. В параграфи 5.1-5.3 се развива общата методология на двумерни разпределения, равиващи се в двумерен степенен ред с инфлационен параметър и които кратко са означени като BIGPSD (или Type III). Пораждащата функция е представена в (5.4), с чиято помощ в Теорема 5.1 се определя общия вид на двумерната вероятностна функция. В параграфи 5.4.1- 5.4.3 се разглеждат по-подробно три интересни примери на специфични двумерни разпределения: биомно, отрицателно-биомно и логаритмично, за които са намерени регурентни формули относно вероятностните функции (Твърдения 5.1-5.3). Намерени са също моментите и съответните функции на Фишер.

Последна Глава 6 се нарича Заключение и в нея на 3 страници се резюмира основното съдържание на дисертацията. Отделно са дадени «Основни приноси в дисертацията», които са представени в 9 точки на 4 страници. Те адекватно отразяват получените научни и научно-приложни резултати, тъй като съответствуват и на отбелязаното по-горе в съответните глави. Посочени са също и някои насоки за бъдещи изследвания.

3. Автореферат, публикации и бележки.

Авторефератът съдържа 31 страници и буквално следва структурата на дисертацията, като отразява точно най-важните получени резултати в съответните глави. Дадени са също основните приноси и библиографията от дисертацията. Всичко това ми дава пълно основание да заключа, че авторефератът правилно отразява основните резултати от дисертацията.

Резултатите от дисертацията са публикувани в 6 научни статии, от които 1 е в Доклади на БАН и 5 в сборници от конференции (2 в чужбина и 3 у нас), а една работа е в печат.

Дисертацията е написана ясно и разбрано, но някои неща биха могли да бъдат представени и по-добре. Например, Забележка 4.1 от дисертацията не е достатъчно пълна. Въобще получените в Глава 4 резултати би било добре да бъдат сравнени с тези в известната книга на Feller, том II. Освен посочените по-горе забележки, биха могли да се посочат още някои очевидно поправими грешки и недостатъци, които обаче не затрудняват сериозно читателя и не развалят доброто впечатление като цяло от получените резултати и яснотата на изложение.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предственият дисертационен труд има всички качества на сериозно научно изследване в областта на стохастичното моделиране. Дисертантката успешно е обладала и творчески прилага редица вероятностни и информационни техники, които я определят като един изграден специалист в тази област. Всичко това дава пълно основание да заключим, че са налице всички условия от ЗРАСРБ и неговия правилник, както и този на ФПМИ - ТУ, които се прилагат за получаване на научната степен „Доктор“ по съответната специалност. Ето защо определено предлагам на почитаемото жури да оцени подобаващо представения дисертационен труд, а на неговата авторка **Меглена Делчева Лазарова** да бъде присъдена образователната и научна степен „ДОКТОР“ в Област 4. Природни науки, математика и информатика, Професионално направление 4.5. Математика, Научна специалност „Математическо моделиране и приложения на математиката“.

15.09.2021

Резензент:

/професор дмн Николай М. Янев/

REVIEW of the dissertation
Counting probability distributions
and applications in risk models

for the award of the educational and scientific degree "Doctor",
Domain 4. Natural sciences, Mathematics and Computer Science;
Professional direction 4.5. Mathematics;

Scientific specialty: "Mathematical Modeling and Application of Mathematics"

Author: **Meglana Delcheva Lazarova,**

Postgraduate student of independent preparation for the
Department „Mathematical Modeling and Numerical methods“,
Faculty of Applied Mathematics and Computer Science, Technical University-Sofia

Scientific supervisor: Professor Dr. Mikhail Todorov, TU-Sofia

Reviewer: Professor Nikolay M. Yanev, Dr.Sci., IMI-BAS

5. Basic information.

The presented dissertation is in Bulgarian and contains 161 pages of text, of which the bibliography is 9 pages with 84 titles. In addition, there is an Abstract (in Bulgarian) with 31 pages of text, of which 6 pages bibliography with the same 84 titles as in the dissertation.

The author is Meglena Delcheva Lazarova, a postgraduate student of independent training for the Department of Mathematical Modeling and Numerical Methods, Faculty of Applied Mathematics and Computer Science, Technical University-Sofia, scientific supervisor Professor, Dr. Mikhail Todorov, TU-Sofia. In 1997-2002 she studied at FMI-SU and graduated with a master's degree in Mathematics, and also received a second specialty as a teacher of Mathematics and Computer Science. In 2002-2003 M. Lazarova is a teacher of computer science at the first English school in Sofia. In 2006-2009 she is the chief expert at the State Agency for Youth and Sports. From 28.02.2011 to 28.02.2015 she is an Assistant of the Department of "Mathematics" in the University of Economics, Sofia. From 11.03.2015 to

11.09.2015 she teaches in FMI - SU. Since 26.09.2016, she has been an assistant professor of the Department of Mathematical Analysis and Differential Equations at the Faculty of Applied Mathematics and Computer Science, Technical University-Sofia.

The jury appointed by order of 4.5-07/17.06.2021 of the Rector of TU-Sofia. The pre-defense in FAMI-TU took place on 16.06.2021. The documentation and all protection procedures are consistent with the descriptions of the law and the relevant rules.

6. Structure, analysis, scientific and applied contributions.

The presented dissertation contains 161 pages of typewritten text, given in 6 chapters, a bibliography, the main contributions to the dissertation, publications and reports, and a declaration of originality.

In Chapter 1 (which is called an Introduction and takes 35 pages) are presented the main risk models, probability distributions in risk theory, counting processes in risk theory and in the last Paragraph 4, the main structure of the dissertation is studied. This chapter is well designed and remains a great impression with its historical introduction and exposition. In Chapter 2, four probability distributions are defined, for which probabilistic and generating functions, moments, and recursions were found. In Chapter 3, two new counting processes were defined, for which probabilistic and generating functions, moments were found, and some properties were studied. Chapter 4 introduces two risk models using counting processes from Chapter 3. A number of interesting results were obtained. In Chapter 5, two-dimensional distributions are introduced and investigated, for which a number of properties are proved. Chapter 6 (Conclusion) analyzes the results obtained. The 9-page bibliography contains 84 titles. There are detailed 9 main contributions, a list of 6 publications on the dissertation and 14 exported reports.

We will focus a little more on some of the results obtained in the dissertation.

In Chapter 2, the following new probability distributions are actually defined and studied:

- (1) I-Delaporte distribution (Delaporte distribution with inflation parameter);
- (2) Non-centered Poya-Aepli distribution;
- (3) Poya-Aepli-Lindley distribution;
- (4) Distribution of Poya-Aepli from a rank k - second type.

For (1)-(4) the corresponding generating functions and distributions, moments, recurrent probability formulas, as well as interesting computer graphs are given.

Note that (1) is obtained from the randomization of the main parameter λ of through a biased Γ -distribution. In fact, almost everywhere in the dissertation, the concept of "mixing" is used in the mixed concept of randomization, which does not sound very good. In Statement 2.1 and Subsequent 2.1, interesting recursive formulas for the probability function were found. Note that in the dissertation, the concept of a probability function actually means the corresponding discrete distribution (as the latter concept is more often used in the Bulgarian literature).

On the other hand, (2) is defined as the sum of independent random variables distributed, respectively, Poya-Aepli and Poisson, and in Statement 2.2 and Corollary 2.2, recurrent formulas for the probability function are presented. The corresponding Fisher index was also found, which seems to be under-dispersed with respect to Poya-Aepli and over-dispersed with respect to Poisson distribution.

Randomization of the parameter λ of the Poya-Aepli distribution about the Lindley distribution leads to (3), which, in turn, can be represented as a distribution of the sum of two independent random variables with a complex geometric distribution, one of which has an atom at zero. Statement 2.3 and Corollary 2.3 offer recursive formulas for the probability function. The Fischer index was also found.

In (3) the complicating random variables have a specific distribution that occurs from a geometric, suspended to a certain finite value k , in which the entire probability mass is concentrated, which remains to infinity. The resulting function of (3) is given in (2.29), and in Statement 2.4 and Corollary 2.4, the corresponding recursive formulas for probabilities are presented.

Remark 1: Chapter 2 also gives 4 Lemmas without proof and explanation to them.

Chapter 3 defines the following item Generalized Poya-Aepli processes:

(A) Non-centered Poya-Aepli process;

(C) Process of Aepli from rank k - second type.

Note that the distributions of both processes are related to the corresponding distributions (2) and (4) from the Chapter 2. The processes are determined by their corresponding infinitesimal characteristics (3.4) and (3.9), and the corresponding systems of Kolmogorov differential equations (3.5) and (3.10) were found, from which the corresponding generating functions for the processes also follow.

Note 2: For Lemma 3.1 and Lemma 3.2 given without proof, there are also no comments in Chapter 3.

In Chapter 4, the processes (A) and (B) discussed in Chapter 3 are applied as counting processes in the classical risk model defined in (1.1). The probabilities of ruin $\Psi(u)$ with an initial capital of $u \geq 0$ are studied and also, the accumulation coefficient θ and the corresponding functions $G(u, y)$ (introduced by Gerber et al., 1987), which depend on the time to ruin $\tau(u)$ and the current deficit $D = |u + X(\tau(u))|$. For $G(u, y)$ the corresponding integro-differential of equations (4.4) and (4.12) are obtained, respectively, when the process (A) or when the process (B) are used. Accordingly, in Theorem 4.1 and Theorem 4.4, the functions $G(0, y)$ are presented through the corresponding distribution functions of accumulated claims (4.5) and (4.13).

Equations for the probabilities of ruin (4.7) and (4.15), respectively, are also found. The corresponding probabilities of ruin with zero initial capital are obtained explicitly (Theorem 4.3 and Theorem 4.6). In paragraphs 4.1.1 and 4.2.1, it is shown that with exponentially distributed claims, all the functions defined above can be explicitly calculated.

Chapter 5 introduces and explores a class of aggregated two-dimensional distributions that can be used as counting processes in two-dimensional risk models. In Paragraphs 5.1-5.3, a general methodology of two-dimensional distributions is developed with an inflationary parameter and which are briefly referred to as the BIGPSD (or Type III). The probability generating function is presented in (5.4), with the help of which the general type of a two-dimensional probability function is determined in Theorem 5.1. In Paragraphs 5.4.1-5.4.3, three interesting examples of specific two-dimensional distributions are considered in more detail: binomial, negative-binomial and logarithmic, for which recurrent formulas about the probability function are found (Statements, 5.1-5.3). The moments and the corresponding Fisher functions are also obtained.

The last Chapter 6 is called "Conclusion", and it summarizes the main content of the dissertation on 3 pages. Separately, the "Main contributions to the dissertation" are given, which are presented in 9 points on 4 pages. They adequately reflect the scientific and applied results obtained, since they correspond to what was noted above in the relevant chapters. Some recommendations for future research are also indicated.

7. Author's abstract, publications and notes.

The Abstract contains 31 pages and literally follows the structure of the dissertation, accurately reflecting the most important results obtained in the relevant chapters. The main contributions and bibliography from the dissertation are also given. All this gives me every reason to conclude that the abstract correctly presents the main results of the dissertation.

The results of the dissertation were published in 6 scientific articles, of which 1 was in the Proceedings of the BAs and 5 in the collections of conferences (2 abroad and 3 in Bulgaria), and one work is submitted.

The dissertation is written clearly, but some things can also be presented better. For example, Remark 4.1 from the dissertation is not sufficiently completed. In general, it would be good to compare the results obtained in Chapter 4 with the results in Feller's famous book (Volume 2). In addition to the above-mentioned comments, some apparently correctable errors may also be indicated, which, however, do not complicate the reader and do not disturb the overall good impression of the results obtained and the clarity of the exposition.

8. Conclusions

The presented dissertation has all the qualities of a serious scientific research in the field of stochastic modeling. The author is successfully and creatively applies a number of probabilistic methods that define her as one established specialist in this field. All this gives full reason to conclude that there are all the conditions from the corresponding laws and its rules, which are used to obtain a scientific degree "Doctor" in the corresponding specialty. Therefore I suggest that the esteemed jury, in order to evaluate the professional activity properly represented, and its author Meglena Delcheva Lazarova, be awarded the educational and scientific degree "DOCTOR" in the Domain4. Natural sciences, Mathematics and Computer Science; Professional direction 4.5. Mathematics; Scientific specialty "Mathematical Modeling and Application of Mathematics".

15.09.2021

Reviewer:

/ Professor Nikolay M. Yanev/