Р Е Ц Е Н З И Я

за дисертационен труд, представен за присъждане на образователната и научна степен **„доктор"**

Област на висше образование: **4. „Природни науки, математика и информатика"**

Професионално направление: **4.5 „Математика"**

Научна специалност: **„Математическо моделиране и приложение на математиката"**

Тема: ***„Разпределение на Уишарт и приложение"***

Автор**: Анна Димитрова Николова**

*Рецензент: **доц. д-р Велика Илиева Драгиева***

Обща информация за докторанта*.* Анна Димитрова Николова завършва висше образование с професионална квалификация „математик - преподавател по математика", в Шуменския Университет „Епископ Константин Преславски", през 1983 год.

От 1983 до 1985 година работи като учител по Математика в ОУ „Кирил и Методи", село Старо Оряхово, област Варненска, а от 1985 година до сега работи в ТУ, град Варна, като асистент, старши асистент и главен асистент.

Считано от 18.05.2020 год. е зачислена за срок от 2 години в докторантура на самостаятелна подготовка към катедра „Математически анализ и диференциални уравнения" на Факултет „Приложна математика и информатика", ТУ - София. Научни ръководители са проф. д-р Красимира Стоянова Проданова, ТУ - София и доц. д-р Мариан Неделчев Милев, УХТ - Пловдив.

В представената автобиография е отбелязано, че докторантката има 13 публикации и две ръководства, но е представен списък само на публикациите по дисертацията, 5 на брой.

Описание и анализ на дисертацията.

Дисертацията е с общ обем 112 страници и се състои от: Съдържание, Увод, 4 глави, Заключение, Декларация за оригиналност, Благодарности и Литература. Заключението се състои от Основни приноси на дисертацията, Публикации по дисертацията и Представяне на резултатите, свързани с дисертацията. Литературата съдържа 85 заглавия обхващащи периода 1915 – 2020 год.

Уводът е добре оформен и ясно представя главните аспекти от съдържанието на дисертацията. Основен обект на изследване, както се вижда и от заглавието на дисертацията е матрично разпределение, известно като разпределение на Уишарт. Това разпределение, въведено като такова в статия на Уишарт от 1928 година и до днес е актуално както от теоретична, така и от практическа гледна точка. Различни са подходите за получаване на такова разпределение, което се дължи на важната му роля и приложение в многомерния статистически анализ, инженерните науки, иконометрията, финансовата математика и други области на научните изследвания. В Увода е направен подробен и точен обзор на тези подходи, както и на конкретните области на приложение на Уишарт разпределението. Специално място е отделено на изследване структурата на моментите на Уишарт разпределението, което все още е активна изследователска тема с най-разнообразни практически приложения и което е една от главните мотивации за разгледания в дисертацията подход. Основната цел на този подход е да се представи Уишарт матрицата чрез независими случайни величини, което съществено облекчава пресмятането на моментите на Уишарт разпределението.

Направеният в Увода обзор на съдържанието на самата дисертация също е добре представен, но имам една забележка. Някои от използваните в Увода величини и означения (като например величината C във формулата за плътността $f_M(Y_P)$ на стр. 8; означението за пропорционалност и други) са дефинирани по-нататък в дисертацията. Това е малко объркващо и затруднява прочита на уводната част.

Глава 1 се състои от 2 параграфа и има въвеждащ характер. В §1.1 се дават осовни дефиниции, свързани с Уишарт разпределението и използвани по-нататък в дисертацията – нецентрално и централно разпределение на Уишарт; несингулярно и сингулярно разпределение на Уишарт; стандартно Уишарт разпределение; класическо Уишарт разпределение; обобщено Уишарт разпределение.

Струва ми се, че в равенство (1.1), което по принцип не е свързано с по-нататъшните доказателсва в дисертацията има някаква грешка, тъй като дефинираната чрез него величина не е матрица. §1.2 е посветен на свойствата на Уишарт разпределението, повечето от които с голямо приложение в многомерния статистически анализ. За голяма част от представените свойства е посочен източника, където могат да бъдат намерени. Но има и такива, за които това не е направено.

Глава 2 се състои от 6 параграфа, добре организирани и озаглавени. В §2.1 е изведено представяне на случайна матрица със стандартно Уишарт разпределение с размерност 2x2 чрез разпределенията на три независими случайни величини. Две от тях са с едно и също хи-квадрат разпределение и една е със зададено специфично разпределение (Теорема 2.1.1). В §2.2 е изведено аналогично представяне, но за матрица със стандартно Уишарт разпределение с размерност *p*x*p*, *p*>2 (Теорема 2.2.1). Тук Уишарт матрицата е изразена чрез *p* независими величини с едно и също хи-квадрат разпределение (означени с $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_p$) и съвкупност от още *p*(*p*-1)/2 случайни величини (означени с $\nu_{ij}, 1 \le i < j \le p$), зададени със специфична съвместна плътност на разпределение (Теорема 2.2.1). Интересното тук е, че случайните величини ν_{ij} са независими от $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_p$, но не са независими помежду си. За да се получи разлагане на Уишард матрицата чрез независими случайни величини, в следващите параграфи на Глава 2 е получено представяне на величините ν_{ij} чрез подходящи функции от независими случайни величини. По-точно, в §2.3 са дефинирани независими случайни величини (означени с $\eta_i, i = 1, ..., p-1$) чрез които е изведена рекурентна връзка между симетрични матрици (означени с $M(p)$) с единици по главния диагонал и елементи извън него равни на случайните величини $\nu_{ij}, 1 \le i < j \le p$. Тази рекурентна връзка се прилага в следващия парагпаф §2.4 за представяне на матриците $M(p)$ чрез независимите случайни величини η_i, както и за конструиране на матрици от вида $M(p)$. Накрая на §2.4 е показано как фамилията централни Уишарт разпределения може да бъде генерирана от фамилията стандартни Уишарт разпределения, за които са в сила доказаните твърдения. Това позволява всяко централно Уишарт разпределение да може да се представи чрез независими случайни величини.

В §2.5 е получено разлагане на детерминантата на матрица от вида $M(p)$, а в §2.6 е изведена връзка между разпределението на независимите случайни величини η_i и симетричното Бета разпределение.

Цялата глава е ясно и прецизно написана, всички участващи величини и символи са коректно дефинирани. Доказателствата на включените теореми и леми също са много добре представени.

В **Глава 3** се разглеждат същите проблеми като разгледаните в Глава 2, но за обобщено Уишарт разпределение. Съответно, нещата вървят аналогично на тези в Глава 2, но в усложнен вариант, тъй като величините τ_i имат едно и също Гама разпределение, а съвместната плътност на случайните величини ν_{ij} е с реален параметър (който в случая на класическо Уишарт разпределение е цяло число). Формулите, по които зависимите случайни величини ν_{ij} се представят чрез независимите величини η_i също са по-сложни и са удачно илюстрирани чрез Пример 3.3.1. В него е конструирано разлагането на обобщена Уишарт матрица с размерност 4x4.

В **Глава 4** са показани някои приложения на изведените в предишните две глави формули. Те са свързани с определяне моменти на Уишарт разпределения (§4.1), генериране на обобщени Уишарт матрици (§4.2), както и оценяване на корелационна и ковариационна матрица на многомерно нормално разпределение (§4.3). Основната трудност при изложения метод за пресмятане на моментите се свежда до не леки, но стандартни матрични преобразования и определяне необходимите моменти на едномерни случайни величини. Изведени са формули за моментите от ред *k* = 2 и k = -2 за централна 2x2 Уишарт матрица (§4.1.1 и §4.1.2), както и за момента от ред k = -1 на централна 3x3 Уишарт матрица (§4.1.3). Получените в тези параграфи резултати са сравнени със съществуващи в литературата резултати за същите величини. В §4.1.4 е представен метод за пресмятане на многомерни моменти от ред *к* на централна *pxp* Уишарт матрица. Методът е илюстриран за конкретен многомерен момент от ред к = 3 за 4x4 централна Уишарт матрица. Не е трудно методът да бъде програмиран, и да бъдат получени числени резултати като евентуална бъдеща дейност на докторантката.

В последния §4.3 се разглежда конкретна извадка с 50 седмични наблюдения за възвращаемостта на всеки от 10 портфейла акции, съставени от акции на фондовите борси в Торонто и публикувани в книгата на Jobson, J. D., 1992 год. На базата на тази извадка се демонстрира приложение на Уишарт разпределинието при проверка на хипотези за ковариационната матрица на многомерно нормално разпределение. Темата е много интересна, особено от практическа гледна точка, но ми се струва, че параграфът би могъл да бъде малко по-добре организиран, като се подчертае новото в подхода и се сравни с резултатите на Jobson.

Заявените в дисертацията **Основни приноси** са формулирани ясно и точно и са действително такива. Нямам какво да добавя или променя.

Публикациите по дисертацията са 5 на брой, от които две са самостоятелни и три са с един съавтор. Две от статиите са публикувани в годишник на СУ, една е в рецензирано списание и останалите две са в доклади от конференции.

Даден е списък с имената на 4 конференции, на които са **представени резултати от дисертацията**. В този списък не е посочен начинът на представяне на резултатите – доклад (име на доклада), постер или някакъв друг начин.

Авторефератът отразява пълно и точно съдържанието на дисертацията. В него са посочени и 3 цитирания на една от статиите по дисертацията, направени в три различни статии на един и същ автор.

Забележки и препоръки. Забележките и препоръките, които имам са направени при описанието и анализа на дисертацията. Има известен брой технически грешки, включително в заглавната страница, но това е разбираемо.

Заключение. Въз основа на изложеното до тук считам, че представените в дисертацията резултати отговарят по обем и качество на изискванията на ЗРАСРБ и нормативните актове за неговото прилагане при получаване на научни степени и заемане на академични длъжности в ТУ - София.

Убедено **препоръчвам на уважаемото научно жури да присъди** на автора му, **Анна Димитрова Николова** образователната и научна степен „доктор" в област на висше образование 4. „Природни науки, математика и информатика", професионално направление 4.5. „Математика", по научна специалност „Математическо моделиране и приложение на математиката".

31.08. 2021 г. Рецензент:

/доц. д-р Велика Драгиева/

R E V I E W

on a Dissertation

for obtaining the educational and scientific degree “Doctor”

Research area: **4. „Natural Science, Mathematics and Informatics”**

Professional field: **4.5 „Mathematics”**

Scientific specialty: **„Mathematical modeling and application of mathematics”**

Title: ***„Wishart distribution and application”***

Author**: Anna Dimitrova Nikolova**

Reviewer*: **Assoc. Prof. Velika Ilieva Dragieva***

Personal data. Anna Dimitrova Nikolova graduated with a professional qualification "mathematician - teacher of mathematics" at the University of Shumen "Bishop Konstantin Preslavski" in 1983.

Since 1983 to 1985 she worked as a teacher of Mathematics at the Cyril and Methodius Primary School, Staro Oryahovo village, Varna region, and since 1985 until now she has been working at the Technical University, Varna, as an assistant, senior assistant and chief assistant.

Since 18.05.2020 she is enrolled for a period of 2 years in doctoral studies of independent preparation at the Department of Mathematical Analysis and Differential Equations of the Faculty of Applied Mathematics and Informatics, Technical University - Sofia. Supervisors are Prof. Krassimira Stoyanova Prodanova, Technical University - Sofia and Assoc. Prof. Marian Nedelchev Milev, UFT - Plovdiv.

In the presented CV it is noted that the doctoral student has 13 publications and two manuals, but a list of only the publications on the dissertation is presented, 5 in number.

Description and analysis of the dissertation.

The dissertation has a total volume of 112 pages and consists of: Contents, Introduction, 4 chapters, Conclusion, Declaration of originality, Acknowledgments and Literature. The Conclusion consists of Main contributions of the dissertation, Publications on the dissertation and Presentation of the results related to the dissertation. The literature contains 85 titles covering the period 1915 - 2020.

The **Introduction** is well formed and clearly presents the major aspects of the dissertation content. The main object of study, as can be seen from the title of the dissertation is the matrix distribution, known as the Wishart distribution. This distribution, introduced as such in Wishart's 1928 paper, is still relevant today from both a theoretical and a practical point of view. There are different approaches to obtaining such a distribution, which is due to its important role and application in the multidimensional statistical analysis, engineering sciences, econometrics, financial mathematics and other areas of research. The Introduction provides a detailed and accurate overview of these approaches, as well as the particular areas of application of the Wishart distribution. A special place is given to the study of the structure of the Wishart distribution moments, which is still an active research topic with a variety of practical applications and which is one of the main motivations for the approach considered in the dissertation. The main goal of this approach is to present the Wishart matrix through independent random variables, which significantly facilitates the calculation of the moments of the Wishart distribution.

The overview of the content of the dissertation made in the Introduction is also well presented, but I have one remark. Some of the quantities and notations used in the Introduction (such as the quantity C in the density formula $f_M(Y_P)$ on page 8; the notation of proportionality, etc.) are defined later in the dissertation. This is a bit confusing and makes it difficult to read the introductory part.

Chapter 1 consists of 2 paragraphs and is introductory. §1.1 gives main definitions related to the Wishart distribution and used further in the dissertation - non-central and central Wishart distribution; non-singular and singular distribution of Wishart; standard Wishart distribution; classical Wishart distribution; generalized Wishart distribution. It seems to me that in equation (1.1), which in principle is not related to the further proofs in the dissertation, there is some error, because the quantity defined by it is not a matrix. §1.2 is devoted to the properties of the Wishart distribution, most of which have great application in multidimensional statistical analysis. For most of the properties presented, the source where they can be found is indicated. But there are some for which this has not been done.

Chapter 2 consists of 6 paragraphs, well organized and titled. In §2.1 a random matrix with a standard Wishart distribution of dimension 2x2 is presented through the distributions of three independent random variables. Two of them have the same chi-square distribution and one has a given specific distribution (Theorem 2.1.1). In §2.2 a similar representation is derived, but for a matrix with standard Wishart distribution and dimension *p*x*p*, *p*> 2 (Theorem 2.2.1). Here the Wishart matrix is expressed by *p* independent quantities with the same chi-square distribution (denoted by $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_p$) and a set of another *p* (*p*-1) / 2 random variables (denoted by $\nu_{ij}, 1 \le i < j \le p$) with a specific joint distribution density (Theorem 2.2 .1). The interesting thing here is that the random variables ν_{ij} are independent of $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_p$, but not independent of each other.

In order to obtain the decomposition of the Wishart matrix by independent random variables, the following paragraphs of Chapter 2 provide a representation of the quantities ν_{ij} by appropriate functions of independent random variables. More precisely, in §2.3 are defined independent random variables (denoted by $\eta_i,\ i=1,\ldots,p-1$) through which a recurrent connection is derived between symmetric matrices (denoted by $M(p)$) with units on the main diagonal and elements outside it equal to the random variables $\nu_{ij}, 1\le i<j\le p$. This recurrent relationship is applied in the next paragraph §2.4 for the representation of matrices $M(p)$ by the independent random variables η_i, as well as for construction of matrices of the type $M(p)$. At the end of §2.4 it is shown how the family of central Wishart distributions can be generated by the family of standard Wishart distributions for which the proved statements are valid. This allows any central Wishart distribution to be represented through independent random variables. In §2.5 a decomposition of the determinant of a matrix of $M(p)$ type is obtained, and in §2.6 a connection is derived between the distribution of the independent random variables η_i and the symmetric Beta distribution.

The whole chapter is clearly and precisely written, all the quantities and symbols involved are correctly defined. The proofs of the included theorems and lemmas are also very well presented.

Chapter 3 addresses the same issues as those discussed in Chapter 2, but for a generalized Wishart distribution. Accordingly, things are similar to those in Chapter 2, but in a more complicated version, because the quantities τ_i have one and the same Gamma distribution, and the joint density of random variables v_{ij} has a real parameter (which in the case of the classical Wishart distribution is an integer). The formulas by which the dependent random variables v_{ij} are represented by the independent variables η_i are also more complex and are aptly illustrated by Example 3.3.1. In it the decomposition of a generalized Wishart matrix with dimension *4*x*4* is constructed.

Chapter 4 shows some applications of the formulas presented in the previous two chapters. They are related to determining the moments of Wishart distributions (§4.1), generating generalized Wishart matrices (§4.2), as well as estimating the correlation and covariance matrix of multidimensional normal distribution (§4.3).

The main difficulty in the presented method for calculating the moments is reduced to complicated but standard matrix transformations and determining the necessary moments of one-dimensional random variables. Formulas are derived for the moments of order k = 2 and k = -2 for a central 2x2 Wishart matrix (§4.1.1 and §4.1.2), as well as for the moment of order k = -1 of a central 3x3 Wishart matrix (§4.1 .3).. The results obtained in these paragraphs are compared with the results, given in the literature for the same quantities. §4.1.4 presents a method for calculating multidimensional moments of order k of a central pxp Wishart matrix. The method is illustrated for a particular multidimensional moment of order k = 3 for a 4x4 central Wishart matrix. It is not difficult to program the method and to obtain numerical results as a possible future activity of the doctoral student.

The last §4.3 examines a particular sample with 50 weekly observations of the return on each of the 10 stock portfolios made up of shares on the Toronto Stock Exchange and published in Jobson's book, 1992. Based on this sample, the application of the Wishart distribution in testing hypotheses for the covariance matrix of a multidimensional normal distribution is demonstrated. The topic is very interesting, especially from a practical point of view, but it seems to me that the paragraph could be a little better organized by highlighting the new approach and comparing it with Jobson's results.

The main contributions stated in the dissertation are formulated clearly and precisely and are actually such. I have nothing to add or change.

The publications on the dissertation are 5, of which two are without co-authors and three are with one co-author. Two of the papers are published in an Annual of Sofia University, one is in a peer-reviewed journal and the rest two are in conference proceedings.

A list of the names of 4 conferences at which **the results of the dissertation are presented** is given. This list does not indicate the way of presenting the results - report (name of the report), poster or any other way.

The author's summary completely and accurately reflects the content of the dissertation. It also contains 3 citations of one of the papers on dissertation, made in three different papers by the same author.

Remarks and recommendations. The remarks and recommendations I have are made in the description and analysis of the dissertation. . There are some technical errors, including on the title page, but this is understandable.

Conclusion. Based on the above, I find that the results presented in the dissertation meet in volume and quality the requirements of the law and regulations for its implementation for obtaining scientific degrees and holding academic positions at TU - Sofia.

I strongly **recommend to the esteemed scientific jury to award** its author, **Anna Dimitrova Nikolova** the educational and scientific degree "Doctor" in research area 4. „Natural Science, Mathematics and Informatics”, professional field 4.5. „Mathematics”, scientific specialty „Mathematical modeling and application of mathematics”.

31.08. 2021 Reviewer:

/ *Assoc. Prof. Velika Dragieva* /