

РЕЦЕНЗИЯ

от проф. дн Леда Димитрова Минкова

ОТНОСНО: представеният проект за дисертация за придобиване на образователната и научна степен "доктор" от

Анна Димитрова Николова на тема

Разпределение на Уишарт и приложение

Рецензията е изготвена съгласно заповед на Ректора на Технически Университет No ОЖ-4.5-04 от 20.05.2021 год.

Биографична справка. Анна Николова е завършила Математика в Шуменски Университет. През 1998 год. има шест семестъра специалност Счетоводство и контрол в Икономически Университет във Варна. През годините е работила като учител по математика, след това асистент, старши асистент и главен асистент в катедра Математика в Технически Университет във Варна. В момента, съгласно новите правила е асистент в ТУ Варна и води упражнения по всички математически дисциплини. През май 2020 е зачислена в докторантура на самостоятелна подготовка по направление 4.5 Математика, Математическо моделиране и приложение на математиката.

Общо описание на дисертацията. Представената работа е върху 106 страници и е разделена на увод, четири глави и литература от 85 заглавия. В дисертацията се разглежда разпределение на Уишарт с някои негови свойства и приложение. Актуалността на проблемите идва от факта, че разпределението е дефинирано върху множеството на случайните матрици. От друга страна, един от основните проблеми в статистиката е анализиране и оценяване на корелационната и ковариационната матрица. Една възможност за решаване на този проблем е чрез разпределение на Уишарт. Показано е приложение в оценяването на корелационната и ковариационната матрица чрез разпределение на Уишарт.

В **Увода** е направен подробен преглед на историческото развитие на разпределението на Уишарт с добре подбрани цитати. Разгледани са различните методи за извеждане на разпределението. Като обобщение на χ^2 разпределението с n степени на свобода, то е свързано с матриците от ковариациите и корелациите на многомерното нормално разпределение. От тук идва и връзката с многомерния статистически анализ и многобройните приложения.

В **Глава 1** е дадено класическото разпределение на Уишарт с някои негови свойства. Показани са маргиналните и условните разпределения. Теорема 1.2.11 съдържа характеристични свойства на многомерното нормално разпределение и връзката му с разпределението на Уишарт. Съществен резултат за разпределението на обобщената дисперсия се съдържа в Теорема 1.2.12.

В **Глава 2** е получено едно представяне на разпределението на Уишарт. Оказва се, че то е разпределение на случайна матрица, чиито елементи са функции от независими случайни величини и обобщава χ^2 разпределението. Плътността на разпределението е дефинирана в множеството на всички положително определени матрици. Получено е разлагане на класическото разпределение на Уишарт. В параграф 2.1 се започва с разлагане на случайна матрица с размерност 2×2 (Теорема 2.1.1). В параграф 2.2 е получено разлагане на матрица с размерност $p \times p$ за цяло число $p > 2$ (Теорема 2.2.1). Намерено е представяне на разпределението на Уишарт чрез разпределението на независими случайни величини и независима от тях съвкупност от случайни величини, които не са независими помежду си. Получена е рекурентна връзка между случайни матрици с разпределение на Уишарт (Теорема 2.3.1). За целта са доказани две лема (Лема 2.3.1 и Лема 2.3.2), които имат самостоятелно значение. В параграф 2.4 е получено представяне на елементите на матрица с разпределение на Уишарт чрез независими случайни величини (Теорема 2.4.2). В Теорема 2.4.1 е даден метод за конструиране на случайна матрица с разпределение на Уишарт. В параграф 2.5 е получено разлагане и на детерминантата на матрица с разпределение на Уишарт (Теорема 2.5.1). И тук двете помощни лема (Лема 2.5.1 и Лема 2.5.2) имат самостоятелно значение. В параграф 2.6 са дадени свойствата на независимите случайни величини от разлагането на матриците с разпределение на Уишарт. Показано е, че независимите случайни величини имат Beta разпределение.

В **Глава 3**, с цел приложение, е предложено обобщение на разпределението на Уишарт с неговото разлагане. Предложеното обобщено разпределение на Уишарт е обобщение на Гама разпределението. Тук параметърът n е реален, означен с α . Оказва се, че за обобщеното разпределение на Уишарт са в сила свойства, подобни на тези при класическото разпределение на Уишарт (Теорема 3.2.1). Отново обобщеното разпределение на Уишарт се представя чрез p независими случайни величини и независимо от тях множество от случайни величини, които не са незави-

сими. При обобщеното разпределение на Уишарт независимите случайни величини имат Гама разпределение. Получен е видът на симетричните случайни матрици с обобщено разпределение на Уишарт (Теорема 3.3.2). Представянето на елементите на случайната матрица чрез независими случайни величини е дадено в параграф 3.3. Представянето при $m = 0$ е в Теорема 3.3.1. Елементите на случайните матрици $\mathbf{M}(p)$, $p = 2, 3, \dots$ се представят чрез независими Beta разпределени случайни величини (Теорема 3.3.3).

В Глава 4 е предложен метод за пресмятане моментите на матрица с разпределение на Уишарт. Тук се разглежда матрица с размерност 2×2 и разпределение на Уишарт. В този случай независимите случайни величини имат χ^2 разпределение. Пресметнати са вторите и отрицателните втори моменти. В параграф 4.1.3 е намерен отрицателен момент на централно разпределение на Уишарт върху матрици от трети ред. Многомерните моменти са пресметнати в 4.1.4. Съгласно разлагането на разпределението от предишните глави, пресмятането на многомерните моменти се свежда до пресмятане моментите на независими случайни величини. В Пример 4.1.4 е демонстриран метода в един частен случай. Разлагането от трета глава се използва в параграф 4.2 за генериране на случайни матрици с обобщено разпределение на Уишарт. В параграф 4.3 се предполага, че една многомерна извадка има нормално разпределение. Използват се публикувани данни от фондовата борса за 50 наблюдения за възвръщаемостта на 10 портфейла от акции. На базата на хубавите свойства на нормалното разпределение, разпределението на Уишарт се използва за оценяване на ковариационната и корелационната матрица. Методът е детайлно описан. Получени са оценки за вектора на средните стойности и за ковариационните и корелационни матрици.

Оформление и изложение. С малки забележки, дисертацията е добре структурирана. Пресмятанията и изводите са много на брой, изпълнени точно и последователно.

Критични бележки. В увода се използва понятието процес на Уишарт, който не е дефиниран. В литературата се съдържат десет работи, които не са цитирани в текста.

Авторефератът на дисертацията отразява пълно и точно получените в дисертацията резултати. Точно и пълно са формулирани научните приноси в дисертацията. Считаю, че заявените от дисертанта приноси действително са такива.

Публикации. Работата е написана на базата на 5 статии, две от които са самостоятелни, две в съавторство с Цветан Игнатов и една в съавторство с Красимира Проданова. Статиите с Цветан Игнатов са в Годишник на СУ. Една от самостоятелните работи е в рецензирано издание, а другите две в доклади от конференции. Докторантката е отбелязала 4 конференции, където са докладвани резултатите от дисертацията. Изнесени са три доклада на международни конференции и един на 46-та конференция AMEE-20.

Заключение. Считам, че представеният дисертационен труд напълно отговаря на изискванията на ЗРАСРБ и неговия правилник. Съгласно всичко казано до тук, предлагам на Почитаемото жури да присъди на Анна Николова образователната и научна степен "Доктор".

09.2021
гр. София

Подпис:.....
Леда Минкова

Review of Doctoral Thesis

Author: Anna Dimitrova Nikolova
Title: Wishart distribution and application
Reviewer: Prof. Leda Minkova, PhD, DSI

Anna Nikolova graduated in bachelor program of Mathematics in Shumen University. She works as Assistant Professor in Mathematics in Technical University of Varna.

General description. The thesis consists of Introduction, four chapters and a References, written on 106 pages. The references contain 85 titles. The thesis is presented for acquiring the educational and scientific degree "Doctor" in the PhD study program Mathematical Modeling and Application of Mathematics in Technical University of Sofia.

A review of the literature related to Wishart distribution is given in the **Introduction**. A lot of citations are given. The Wishart distribution is defined on the set of random matrices and is a generalization of the $\chi^2(n)$ distribution. On the other hand, one of the main problems in statistics is to analyze and estimate the correlation and covariation matrices. A possible decision is to use the Wishart distribution. As application in the thesis, the estimation of correlation and covariance matrices is given.

In **Chapter 1**, the classical Wishart distribution with some properties is given. The marginal and conditional distributions are derived. Characterization properties of the multivariate Gaussian distribution and connection with the distribution of Wishart are given in Theorem 1.2.11. A result related to the distribution of generalized variation is given in Theorem 1.2.12.

In **Chapter 2**, a presentation of the classical Wishart distribution is given. The density is defined on the set of positive defined matrices. In Section 2.1, a decomposition of random 2×2 matrix is given (Theorem 2.1.1). In Section 2.2, the decomposition is on the $p \times p$ matrices, for integer $p > 2$ (Theorem 2.2.1). A presentation of the Wishart distribution through the distribution of independent random variables and independent of them set of not independent random variables is given. Recursion formula of the Wishart distribution is obtained in Theorem 2.3.1. In Section 2.4, the elements of Wishart matrix are presented by independent random variables (Theorem 2.4.2). A method for construction of random matrices with Wishart distribution is given (Theorem 2.4.1). In Section 2.5 a decomposition of the determinant

of Wishart matrix is obtained (Theorem 2.5.1). In Section 2.6, the properties of the independent random variables in the decomposition are given. The independent random variables are Beta distributed.

In **Chapter 3**, one generalized Wishart distribution is given. It is a generalization of the Gamma distribution. The parameter n here is a real parameter, denoted by α . The properties of the Wishart distribution are similar to these of the classical Wishart distribution (Theorem 3.2.1). The independent random variables in the decomposition are Gamma distributed. The symmetric random matrices with generalized Wishart distribution are obtained (Theorem 3.3.2). The presentation of the elements of random matrix through independent random variables is given in Section 3.3. The presentation in the case $m = 0$ is given in Theorem 3.3.1. The elements of the random matrices $\mathbf{M}(p), p = 2, 3, \dots$ are presented by independent Beta distributed random variables (Theorem 3.3.3).

One application of the Wishart distribution is given in **Chapter 4**. A method of calculating the moments of Wishart matrix is given. At first, the author consider a 2×2 Wishart matrix. In this case, the independent random variables are χ^2 distributed. The second and second negative moments are obtained. In Section 4.1.3, the negative moment of the central Wishart distribution of third order is derived. The multivariate moments are derived in Section 4.1.4. According to the decomposition in the previous chapter, the derivation of the multivariate moments leads to the moments of independent random variables. The Example 4.1.4 demonstrates the method in one particular case. The decomposition of the Chapter 3 is used in Section 4.2 for generation of generalized Wishart matrices. In Section 4.3, the author uses published data from ten portfolios of assets. The assumption is that the multivariate sample has a Gaussian distribution. On the basis of the characterization properties of the multivariate Gaussian distribution, the Wishart distribution is applied to estimation of covariance and correlation matrices. The method is given in detail. The estimations of the mean vector and the covariance and correlation matrices are obtained.

In the **Summary**, the results obtained in the thesis are given. I think the results of the thesis mentioned of the author are true.

Publications. The thesis is written on the basis of five published papers. Two of the papers are in the Annuaire Univ. Sofia and three of them in proceedings of conferences. The results of the thesis are reported during 4 conferences.

Remarks. In the Introduction, the author uses not defined "Wishart process". In the References there are ten papers, not cited in the thesis.

Conclusion. The thesis represents a great deal of work. The results are well presented and their interpretation and application are at a high scientific level. In my opinion, the thesis by Anna Nikolova fulfils the conditions for gaining the PhD degree in Mathematical modeling and application of mathematics. Therefor, I strongly recommend the thesis of receiving the Degree of PhD.

Sofia, September, 2021

Leda Minkova