



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ
Факултет по Приложна математика и информатика
Катедра „Математически анализ и диференциални
уравнения“

Маг. Анна Димитрова Николова

РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ НА УИШАРТ И ПРИЛОЖЕНИЕ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на дисертация за придобиване на образователна и научна степен
"ДОКТОР"

Област: 4. Природни науки, Математика и Информатика

Професионално направление: 4.5 Математика

Научна специалност: Математическо моделиране и приложение на
математиката

Научни ръководители: Проф. д-р Красимира Проданова
Доц. д-р Мариан Милев

СОФИЯ, 2021г.

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита от Катедрения съвет на катедра „Математически анализ и диференциални уравнения“ към Факултет по Приложна математика и информатика на ТУ-София на редовно заседание, проведено на 18.05.2021г.

Публичната защита на дисертационния труд ще се състои на 20.09.2021г. от 15.00 часа в Конферентната зала на БИЦ на Технически университет – София на открито заседание на научното жури, определено със заповед № ОЖ-4.5-04/ 20.05.2021г. на Ректора на ТУ-София в състав:

1. Проф. д-р Георги Пенчев Венков - председател
2. Проф. д-р Михаил Димов Тодоров - научен секретар
3. Проф. дн Леда Димитрова Минкова
4. Проф. д-р Михаил Михайлов Константинов
5. Доц. д-р Велика Илиева Драгиева

Рецензенти:

1. Проф. дн Леда Димитрова Минкова
2. Доц. д-р Велика Илиева Драгиева

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в канцеларията на Факултет по Приложна математика и информатика на ТУ-София, блок №2, кабинет № 2228.

Дисертантът е докторант на самостоятелна подготовка към катедра „Математически анализ и диференциални уравнения“ на Факултет по Приложна математика и информатика. Изследванията по дисертационната разработка са направени от автора със съдействието и подкрепата на научните ръководители.

Автор: маг. Анна Николова

Заглавие: Уишарт разпределение и приложение

Тираж: 30 броя

Отпечатано в ИПК на Технически университет – София

I. ОБЩА ХАРАКТЕРИСТИКА НА ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

Актуалност на проблема

Случайните матрици играят важна роля в многомерния статистически анализ. Те се явяват полезен инструмент и в изчислителната математика, физиката, инженерните науки, иконометрията и други области на научните изследвания. Матричното разпределение, познато като разпределение на Уишарт за първи път е получено от Джон Уишарт през 1928г. Уишарт матриците са често използвани в статистиката. Тяхното разпределение съвпада с разпределението на емпиричната ковариационна матрица на многомерния Гаусов модел. Този забележителен резултат е причина разпределението на Уишарт да се среща в много модели на многомерния статистически анализ ([1],[6],[10],[15],[18]). Например използват се моменти на Уишарт разпределението и обратно Уишарт разпределение, за да се оценят коефициентите на толерантност в многомерния Гаусов модел [12]. Това разпределение се ползва от von Rosen ([23], [24]) за намиране на максимално правдоподобни оценки при модели на криви на растеж. При Бейсовския статистически анализ обратното Уишарт разпределение влиза в ролята на априорно разпределение на ковариационната матрица, разглеждана като многомерен параметър, при взимане на извадки от многомерно Гаусово разпределение ([3], [10]). Част от работи, свързани със случайни матрици и разпределение на Уишарт са ([2], [4], [5], [7],[8], [9],[13], [14], [17], [22]).

Елементите на една матрица с разпределение на Уишарт са зависими случайни величини. Разпределението на Уишарт се задава в явен вид чрез многомерна плътност, относно мярката на Лебег, с дефиниционна област множеството на всички положително определени матрици. Тази област е доста сложна и не дава възможност да се намират с класически средства различни маргинални разпределения на Уишарт матрица. За да се получи разпределението на функции от дисперсиите и ковариациите, трябва да се интегрира по съответните области, за да се изключат ненужните променливи, а това е трудно, тъй като е свързано с изискването за положителна определеност на матрицата. Във връзка с този факт би било удобно да се представи разпределението на Уишарт като разпределение на случайна матрица, чиито елементи са функции от независими случайни величини, на които се знае разпределението.

Във финансовата математика процесите на Уишарт се явяват ефективен инструмент за моделиране на стохастични ковариационни структури. Philipov и Glickman [19], [20], формулират общ модел на многомерна стохастична изменчивост, в който вариращите във времето ковариационни матрици се управляват от процеси на Уишарт. Моделът има за цел да осигури пряка връзка между едномерни и многомерни модели, за да се увеличи гъвкавостта при описване на поведението на стохастичните ковариации и да се подобрят оценките и прогнозите за нестабилност. Marie-France Bru [3] преди тях

разглежда процеси на Уишарт и използва разширено разложение на Bartlett, където степените на свобода не са цяло число.

Способността да се моделират и предсказват ковариационни матрици на възвръщаемостта на активите е решаващ аспект в много финансови приложения. При моделиране на Уишарт процеси се налага да се генерират Уишарт матрици, при които параметърът, съответстващ на степените на свобода е възможно да приема нецели стойности.

Макар разпределението на Уишарт да е познато отдавна, структурата на моментите на това разпределение е все още активна изследователска тема. Моментите на функции на матрици с Уишарт разпределение се срещат често в многомерния статистически анализ. Изучават се моменти на Уишарт разпределение и на обратното Уишарт разпределение, включващи функции като следа на матрица, детерминанта на матрица, произведение на Кронекер и др. Те се използват в редица статистически критерии. Продължава да се работи по задачата за пресмятане на многомерни моменти от ред k (product moments) на матрица $\mathbf{W}$ на Уишарт

$$E\left(W_{i_1 j_1} \dots W_{i_k j_k}\right),$$

където за $l=1, \dots, k$, (i_l, j_l) е от декартовото произведение $\{1, \dots, p\}^2$. Letac и Massam [16] разглеждат този проблем, като представят метод свързан със симетричната група.

Цел на дисертационния труд

Целта на дисертационния труд е да се представи класическото централно разпределение на Уишарт и обобщеното разпределение на Уишарт като разпределение на случайни матрици, чиито елементи са функции от независими случайни величини.

Методи за изследване

Приложените математически методи са от областта на Линейната алгебра, Математически анализ, Теория на вероятностите, Математическа статистика. Използвани са софтуерният пакет STATISTICA и системата за компютърна алгебра Maple.

Научна новост

Като се използва намерената рекурентна връзка класическото разпределение на Уишарт и обобщеното разпределение на Уишарт са представени като разпределение на случайни матрици, чиито елементи са функции от независими случайни величини.

Практическа приложимост

Получените резултати са приложени за:

- Пресмятане на многомерни моменти (product moments) на Уишарт разпределение.
- Генериране на случайни матрици с обобщено Уишарт разпределение (с нецели степени на свобода).

Апробация

1. 10-та международна конференция „Policy of Economic and Social Development towards a Knowledge Based Society in Europe”, 5-7.10.2007, FEBA, Sofia University, University of Cologne and Agency for Economic Analysis and Forecasting.
2. 11-та международна конференция „Policies if Economic and Social development in Europe”, 10-11.10.2008г., FEBA, Sofia University, University of Cologne and Agency for Economic Analysis and Forecasting .
3. Трети международен научен конгрес, TU-Varna, 2012.
4. 46-та конференция „Приложение на математиката в техниката и икономиката“ - АМЕЕ’20, ТУ-София, 2020.

Публикации

Основни постижения и резултати от дисертационния труд са публикувани в 5 научни статии, от които две са самостоятелни и три са в съавторство. Две статии са публикувани в Годишник на СУ. Една от самостоятелните статии е публикувана в рецензирано издание, а другите две в доклади на конференции.

Структура и обем на дисертационния труд

Дисертационният труд е в обем от 112 страници, като включва увод, 4 глави за решаване на формулираните основни задачи, списък на основните приноси, списък на публикациите по дисертацията и използвана литература. Цитирани са общо 85 литературни източници. Работата включва общо 3 фигури и 4 таблици. Номерата на дефинициите, твърденията, теоремите в автореферата съответства точно на номерацията им в дисертационния труд.

II. СЪДЪРЖАНИЕ НА ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

ГЛАВА 1. РАЗПРЕДЕЛЕНИЕТО НА УИШАРТ И НЯКОИ НЕГОВИ СВОЙСТВА

Разпределението на Уишарт възниква като многомерно обобщение на χ^2 разпределението. За първи път е разгледано от Уишарт (1928 г.).

Ако векторите $\xi^i = (\xi_{1i}, \xi_{2i}, \dots, \xi_{pi})'$, $\xi^i \in \mathbb{R}^p$, $i = 1, 2, \dots, n$, са независими и нормално разпределени, с вектори на средните $\mu^i = (\mu_{1i}, \mu_{2i}, \dots, \mu_{pi})'$, $i = 1, 2, \dots, n$ и еднаква ковариационна матрица $\Sigma = (\sigma_{ij})$, $(\xi^i \in N_p(\mu^i, \Sigma))$, то съвместното разпределение на елементите на матрицата

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^n \xi^i (\xi^i)'$$

(с $(\xi^i)'$ е означен транспонирания вектор) е известно като нецентрално разпределение на Уишарт $W_p(n, \Sigma, \mathbf{M})$, където $\mathbf{M} = (\mu_{kl})$, $1 \leq k \leq p$, $1 \leq l \leq n$. В частния случай, когато $\mu_i = (0, 0, \dots, 0)'$ за $i = 1, 2, \dots, n$, разпределението на случайната матрица $\mathbf{W}$ е известно като централно разпределение на Уишарт $W_p(n, \Sigma, \mathbf{0})$, където с $\mathbf{0}$ е означена нулевата матрица с размерност $p \times n$. За Случайна матрица $\mathbf{W}$ с размерност $p \times p$ и с централно разпределение на Уишарт $W_p(n, \Sigma)$, $\mathbf{W} \sim W_p(n, \Sigma)$, притежава плътност относно Лебеговата мярка в $\mathbb{R}^{p(p+1)/2}$

$$f_w(\mathbf{X}_p) = C (\det \mathbf{X}_p)^{\frac{1}{2}(n-p-1)} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr}(\Sigma^{-1} \mathbf{X}_p)\right),$$

където константата C има вида

$$C^{-1} = 2^{\frac{pn}{2}} \pi^{\frac{p(p-1)}{4}} (\det \Sigma)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^p \Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1-i)\right).$$

Всъщност това е съвместната плътност на случайните величини по главния и над главния диагонален на матрицата $\mathbf{W}$ и тя съществува при условие, че $n \geq p$ и Σ е неизродена, положително определена матрица. Матрицата $\mathbf{X}_p = (x_{ij})$ е симетрична матрица (с размерност $p \times p$) от променливи, съответстващи на случайните величини в матрицата $\mathbf{W}$; $\text{tr}(\cdot)$ е означение за следа на матрица; $\Gamma(\cdot)$ е известната в анализа гама-функция. Дефиниционната област на плътността са всички точки (x_{ij}) , $1 \leq i < j \leq p$ такива, че симетричната матрица $\mathbf{X}_p$ е положително определена.

Ако се използва многомерната Гама-функция

$$\Gamma_p(u) = \pi^{\frac{p(p-1)}{4}} \prod_{j=1}^p \Gamma\left(u + \frac{1-j}{2}\right), \quad u > \frac{p-1}{2},$$

$$\Gamma_1(u) = \Gamma(u), \quad u > 0$$

плътността на една матрица с разпределение на Уишарт може да се запише във вида

$$f_W(\mathbf{X}_p) = \begin{cases} \frac{(\det \mathbf{X}_p)^{\frac{1}{2}(n-p-1)} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_p)\right)}{2^{\frac{pn}{2}} \Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right) (\det \mathbf{\Sigma})^{\frac{n}{2}}}, & \mathbf{X}_p \succ 0 \\ 0, & \text{в останалите случаи} \end{cases}$$

Положителното цяло число n се явява брой на степените на свобода, а матрицата $\mathbf{\Sigma}$ - параметър на формата. Разпределението се нарича класическо Уишарт разпределение. Ако $n \geq p$ се казва, че $\mathbf{W}$ има несингулярно Уишарт разпределение, а при $n < p$, че $\mathbf{W}$ има сингулярно Уишарт разпределение. Сингулярното Уишарт не притежава плътност на разпределение. Разпределението $W_p(n, \mathbf{I})$ се нарича стандартно Уишарт.

Когато параметърът n , съответстващ на степените на свобода, не е цяло число, разпределението на Уишарт няма връзка с нормалното разпределение и има „собствен живот“. По този начин дефиницията на $W_p(n, \mathbf{\Sigma})$ може да бъде разширена чрез обобщаване на нейната плътност на разпределение като се позволи параметърът n да приема произволни нецели стойности, по-големи или равни на p . Тогава разпределението се нарича обобщено Уишарт разпределение и е дефинирано върху конуса на положително определените реални матрици от ред p .

В действителност Уишарт разпределението е многомерно обобщение на Гама разпределението, когато параметърът n е реално число и на χ^2 разпределението, когато n е цяло число.

ГЛАВА 2. РАЗЛАГАНЕ НА КЛАСИЧЕСКО УИШАРТ РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ

2.1 Разлагане на случайна матрица с разпределение на Уишарт с размерност 2×2

В началото е изведено разлагане на случайна матрица с Уишарт разпределение с размерност 2×2 . При матрица с размерност 1×1 единствения елемент е с χ_n^2 разпределение с n степени на свобода.

Нека матрицата $\mathbf{V}$ има вида

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \tau_1 & \nu \sqrt{\tau_1 \tau_2} \\ \nu \sqrt{\tau_1 \tau_2} & \tau_2 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

където случайните величини τ_1, τ_2 и ν са независими. Предполага се, че случайните величини τ_1 и τ_2 са еднакво хи-квадрат разпределени с n степени на свобода, $\tau_i \in \chi_n^2$, $i=1, 2$ т.е. с плътност

$$f_{\tau_i}(x_i) = \frac{x_i^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x_i}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} I_{(0,+\infty)}(x_i), \quad x_i \in \mathbb{R}^1, \quad i=1,2 \quad (2.2)$$

където $I_{(0,+\infty)}(x)$ е индикатор на интервала $(0, +\infty)$.

Индикатор на множеството G се нарича функцията

$$I_G(x) = \begin{cases} 1, & x \in G \\ 0, & x \notin G \end{cases} \quad (2.3)$$

В частност при $G \equiv (0, +\infty)$

$$I_{(0,\infty)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \infty) \\ 0, & x \notin (0, \infty) \end{cases}.$$

Нека случайната величина ν има плътност

$$f_\nu(x) = C_n (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}} I_{(-1,1)}(x) \quad (2.4)$$

където константата C_n има вида

$$C_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{(n-2)!!}{(n-3)!!}, & n=2k \\ \frac{1}{2} \frac{(n-2)!!}{(n-3)!!}, & n=2k+1 \end{cases} \quad (2.5)$$

Теорема 2.1.1. *Нека S е случайна матрица с разпределение на Уишарт $W_2(n, I)$. Тогава матрицата S и матрицата V от (2.1) съвпадат по разпределение.*

2.2. Разлагане на случайна матрица с Уишарт разпределение с размерност $p \times p$ ($p > 2$)

Следващата Теорема 2.2.1 е обобщение на Теорема 2.1.1 за матрица с размерност $p \times p$, $p > 2$.

Нека случайните величини $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$ са независими и еднакво хи-квадрат разпределени с n степени на свобода, $\tau_i \sim \chi_n^2$, $i=1, \dots, p$, с плътности

$$f_{\tau_i}(x_i) = \frac{x_i^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x_i}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} I_{(0,+\infty)}(x_i), \quad x_i \in \mathbb{R}^1, \quad i=1, \dots, p. \quad (2.6)$$

Нека случайните величини v_{ij} , $1 \leq i < j \leq p$ имат съвместна плътност

$$f_{\{v_{ij}, 1 \leq i < j \leq p\}}(y_{ij}; 1 \leq i < j \leq p) = C \left[\det(\mathbf{Y}_p) \right]^{\frac{n-p-1}{2}} I_B(\mathbf{Y}_p), \quad (2.7)$$

където константата C е подходящо избрана, така че изразът в (2.7) да е многомерна плътност, $\mathbf{Y}_p$ е симетрична матрица от ред p с единици по главния диагонал; $I_B(\cdot)$ е индикаторът на множеството B , състоящо се от всички точки $\{y_{ij}; 1 \leq i < j \leq p\}$ в пространството $\mathbb{R}^{p(p-1)/2}$, за които матрицата $\mathbf{Y}_p$ е положително определена. Освен това се предполага, че съвкупността от случайни величини $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p\}$ е независима от съвкупността $\{v_{ij}, 1 \leq i < j \leq p\}$.

Всъщност $f_{\{v_{ij}, 1 \leq i < j \leq p\}}(y_{ij}; 1 \leq i < j \leq p)$, която е съвместна плътност на $p(p-1)/2$ различни случайни величини v_{ij} , може да се счита за определена не в $\mathbb{R}^{p(p-1)/2}$, а в множеството на симетричните матрици $\mathbf{Y}_p$ и да се бележи $f_M(\mathbf{Y}_p)$.

По-нататък е удобно тя да се нарича плътност на разпределение на вероятностите на случайната матрица

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & v_{12} & \dots & v_{1p} \\ v_{12} & 1 & \dots & v_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1p} & v_{2p} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

като се има предвид, че макар функцията $f_M(\mathbf{Y}_p)$ да се нарича плътност на вероятностите на случайната матрица $\mathbf{M}$ и да се разглежда като функция от

симетрични матрици, тя в действителност се явява съвместна плътност на $p(p-1)/2$ различни случайни величини и е зададена в пространството $\mathbb{R}^{p(p-1)/2}$.

Нека матрицата $\mathbf{V}$ има вида

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \tau_1 & \nu_{12}\sqrt{\tau_1\tau_2} & \dots & \nu_{1p}\sqrt{\tau_1\tau_p} \\ \nu_{12}\sqrt{\tau_1\tau_2} & \tau_2 & \dots & \nu_{2p}\sqrt{\tau_2\tau_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{1p}\sqrt{\tau_1\tau_p} & \nu_{2p}\sqrt{\tau_2\tau_p} & \dots & \tau_p \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Теорема 2.2.1. *Нека $\mathbf{S}$ е случайна матрица с разпределение на Уишарт $W_p(n, \mathbf{I})$, $n \geq p$. Матрицата $\mathbf{S}$ и матрицата $\mathbf{V}$ съвпадат по разпределение ($\mathbf{S} \stackrel{d}{=} \mathbf{V}$).*

Поради факта, че матриците $\mathbf{S}$ и $\mathbf{V}$ са симетрични, Теорема 2.2.1 всъщност отразява съвпадението на съвместното разпределението на случайните величини, намиращи се по главния и над главния диагонал от матрицата $\mathbf{S}$ със съвместното разпределение на случайните величини, намиращи се на съответните позиции в матрицата $\mathbf{V}$.

От Теорема 2.2.1 също следва, че ако случайната матрица $\mathbf{S}$ има разпределение на Уишарт $W_p(n, \mathbf{I})$, то тя съвпада по разпределение с матрицата $\mathbf{V}$, но матрицата $\mathbf{V}$ от своя страна има следното разлагане

$$\mathbf{V} = \text{diag}(\sqrt{\tau_1}, \sqrt{\tau_2}, \dots, \sqrt{\tau_p}) \mathbf{M} \text{diag}(\sqrt{\tau_1}, \sqrt{\tau_2}, \dots, \sqrt{\tau_p}), \quad (2.10)$$

където в симетричната матрица $\mathbf{M}$ участват само случайните величини $\{\nu_{ij}, 1 \leq i < j \leq p\}$ и единици по главния диагонал. Плътността на случайната матрица $\mathbf{M}$ според предположенията на Теорема 2.2.1 има вида

$$f_{\mathbf{M}}(\mathbf{Y}_p) = C \left[\det(\mathbf{Y}_p) \right]^{\frac{n-p-1}{2}} I_B(\mathbf{Y}_p), \quad (2.11)$$

където константата C се изразява по формулата, [21],

$$C = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right]^{p-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \dots \Gamma\left(\frac{n-p+1}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^{\frac{p(p-1)}{2}}}.$$

За този клас разпределения е въведено означението $\Psi(p, n)$.

Ако се интерпретира Уишарт разпределението като разпределение на извадковата ковариационна матрица, когато извадката е направена от многомерно Гаусово разпределение, то разпределението на $\mathbf{M}$ може да се интерпретира като разпределение на извадковата корелационна матрица на същото Гаусово разпределение.

2.3. Рекурентна връзка между случайни матрици с разпределение $\Psi(p, n)$

Съгласно Теорема 2.2.1 е намерено представяне на разпределението на Уишарт чрез разпределението на независимите случайни величини $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$ и съвкупността от случайни величини $\{v_{ij}, 1 \leq i < j \leq p\}$. Съвкупността $\{v_{ij}, 1 \leq i < j \leq p\}$ е независима от съвкупността $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p\}$, но случайните величини v_{ij} са зависими помежду си.

Следващата стъпка е представянето на случайните величини v_{ij} чрез подходящи функции от независими случайни величини. За целта са формулирани и доказани две лемми.

Нека $w_1, w_2, \dots, w_p$ са p на брой величини, приемащи стойности в интервала $(-1, 1)$. Нека $\mathbf{Z}$ е произволна симетрична матрица от ред p с единици по главния диагонал

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & z_{12} & \dots & z_{1p} \\ z_{12} & 1 & \dots & z_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{1p} & z_{2p} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

а симетричната матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})$ от ред $p+1$ е с единици по главния диагонал и елементи извън него от вида

$$\begin{aligned} a_{1j} &= w_{j-1}, \quad j = 2, \dots, p+1 \\ a_{ij} &= w_{i-1}w_{j-1} + z_{i-1,j-1}\sqrt{(1-w_{i-1}^2)(1-w_{j-1}^2)}, \quad 2 \leq i < j \leq p+1. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Лема 2.3.1. За детерминантата на матрицата $\mathbf{A}$ е в сила равенството

$$\det(\mathbf{A}) = (1 - w_1^2)(1 - w_2^2) \dots (1 - w_p^2) \det(\mathbf{Z}).$$

Лема 2.3.2. Ако симетричната матрица $\mathbf{Z}$ от (2.12) е положително определена и променливите w_i , $i=1, \dots, p$ принадлежат на интервала $(-1,1)$, то и матрицата $\mathbf{A}$ от (2.13) е също положително определена.

Множествата от случайни величини $\{v_{ij}, 1 \leq i < j \leq p\}$ за $p=2,3, \dots$, ще бъдат означавани като $\{v_{ij}(p), 1 \leq i < j \leq p\}$ и ще бъдат представяни във вид на симетрични матрици с единици по главния диагонал

$$\mathbf{M}(p) = \begin{pmatrix} 1 & v_{12}(p) & \dots & v_{1p}(p) \\ v_{12}(p) & 1 & \dots & v_{2p}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1p}(p) & v_{2p}(p) & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad p=2,3, \dots, \quad (2.14)$$

а съвместна им плътност ще бъде отбелязвана с $f_{\mathbf{M}(p)}(\mathbf{Y}_p)$ като се има предвид съвместната плътност на случайните величини, намиращи се над главния диагонал.

Теорема 2.3.1. Нека $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{p-1}$ са независими и еднакво разпределени случайни величини с плътност

$$f_{\eta_i}(x_i) = C_n (1 - x_i^2)^{\frac{n-3}{2}} I_{(-1,1)}(x_i), \quad x_i \in \mathbb{R}^1, \quad i=1, \dots, p-1,$$

където C_n има вида

$$C_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Нека случайната матрица $\mathbf{M}(p-1)$ има разпределение $\Psi(p-1, n-1)$ и множествата $\{\eta_i, i=1, \dots, p-1\}$ и $\mathbf{M}(p-1)$ са независими. Тогава случайната матрица $\mathbf{M}(p)$ с елементи, получени по формулите

$$v_{1j}(p) = \eta_{j-1}, \quad 2 \leq j \leq p$$

$$v_{ij}(p) = \eta_{i-1} \eta_{j-1} + v_{i-1, j-1}(p-1) \sqrt{1 - \eta_{i-1}^2} \sqrt{1 - \eta_{j-1}^2}, \quad 2 \leq i < j \leq p$$

има съвместно разпределение $\Psi(p, n)$.

2.4. Представяне на елементите на случайна матрица с разпределение $\Psi(p, n)$ чрез независими случайни величини

В този параграф са въведени случайните величини

$$\eta_i(p-m), \quad p = 2, 3, \dots, \quad 0 \leq m \leq p-2, \quad 1 \leq i \leq p-m-1 \quad (2.15)$$

независими, с плътности в интервала $(-1, 1)$

$$f_{\eta_i(p-m)}(x) = C_{n,m} (1-x^2)^{\frac{n-m-3}{2}} I_{(-1,1)}(x), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (2.16)$$

където

$$C_{n,m} = \frac{\Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-m-1}{2}\right)}.$$

Плътностите в (2.16) не зависят от i , а от p зависят чрез m . С помощта на въведените независими случайни величини $\eta_i(p-m)$ се образуват последователно случайните величини

$$v_{1j}(s) = \eta_{j-1}(s), \quad 2 \leq j \leq s \quad (2.17)$$

$$v_{ij}(s) = \eta_{i-1}(s) \eta_{j-1}(s) + v_{i-1, j-1}(s-1) \sqrt{1 - \eta_{i-1}^2(s)} \sqrt{1 - \eta_{j-1}^2(s)}, \quad 2 \leq i < j \leq s \quad (2.18)$$

за $s = 2, 3, \dots, p$.

Теорема 2.4.1. Симетрична случайна матрица

$$\mathbf{M}(p) = \begin{cases} 1, & i = j \\ v_{ij}(p), & i \neq j \end{cases}, \quad 1 \leq i, j \leq p,$$

с елементи $v_{ij}(p)$, получени по формули (2.17) и (2.18), има разпределение

$\Psi(p, n)$ за $p = 2, 3, \dots$.

От теоремата следва, че матрица $\mathbf{M}(p)$ с елементи, получени по рекурентните формули (2.17) и (2.18) и матрицата $\mathbf{M}$, от разложението (2.10) на Уишарт разпределена матрица, съвпадат по разпределение, $\mathbf{M}(p) \stackrel{d}{=} \mathbf{M}$.

Изложеното в Теорема 2.4.1 дава конструкция за получаване на случайни матрици $\mathbf{M}(p)$ с разпределение $\Psi(p, n)$.

Нека $q(p)$, $p = 2, 3, \dots$ е вектор-стълб с размерност $p-1$ и с елементи случайните величини $\eta_1(p), \eta_2(p), \dots, \eta_{p-1}(p)$ от (2.15)

$$q(p) = (\eta_1(p), \dots, \eta_{p-1}(p))'. \quad (2.19)$$

Нека $\mathbf{N}(p)$ е диагонална случайната матрица от ред $p-1$

$$\mathbf{N}(p) = \text{diag}(\sqrt{1-\eta_1^2(p)}, \dots, \sqrt{1-\eta_{p-1}^2(p)}), \quad (2.20)$$

където $\eta_i(p)$, $i = 1, 2, \dots, p-1$ са елементите на вектора $q(p)$. Образува се матрица $\mathbf{Q}(p)$ с размерност $(p-1) \times (p-1)$

$$\mathbf{Q}(p) = q(p)q'(p) + \mathbf{N}(p)\mathbf{M}(p-1)\mathbf{N}(p).$$

Тогава случайната матрица $\mathbf{M}(p)$, $p = 2, 3, \dots$ може да бъде формирана по следния начин

$$\mathbf{M}(p) = \begin{pmatrix} 1 & q'(p) \\ q(p) & \mathbf{Q}(p) \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

като $\mathbf{M}(1) = 1$. Така получената матрица $\mathbf{M}(p)$ е с разпределение $\Psi(p, n)$, $n \geq p$.

Теорема 2.4.2. *Елементите $v_{ij}(p)$ на случайна матрица $\mathbf{M}(p)$ с разпределение $\Psi(p, n)$, получени по формули (2.17) и (2.18), се представят чрез независимите случайни величини $\eta_i(p-t)$, дефинирани в (2.16), чрез формулите*

$$v_{ij}(p) = \eta_{i-1}(p) \eta_{j-1}(p) \quad (2.22)$$

$$+ \sum_{m=2}^i \left\{ \eta_{i-m}(p-m+1) \eta_{j-m}(p-m+1) \prod_{k=1}^{m-1} \sqrt{1-\eta_{i-k}^2(p-k+1)} \sqrt{1-\eta_{j-k}^2(p-k+1)} \right\}, \quad 1 \leq i < j \leq p,$$

където $\eta_0(p) \equiv 1$, $\nu_{0j}(p) \equiv 1$, $1 \leq j \leq p$, $p = 1, 2, \dots$.

Доказаните теореми се отнасят за матрица на Уишарт $W_p(n, \mathbf{I})$, но фамилията разпределения $\{W_p(n, \Sigma), \Sigma \succ 0\}$ може да бъде генерирана от $W_p(n, \mathbf{I})$ и $p \times p$ матрици, за които $\mathbf{A}\mathbf{A}' = \Sigma$ поради факта, че $\mathbf{W} = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}' \sim W_p(n, \Sigma)$. Като се вземе предвид, че за всяка положително определена матрица Σ съществува неособена матрица $\mathbf{A}$, такава че $\Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}'$, това означава, че представеното разлагане може да се прилага и за случайни матрици с разпределение $W_p(n, \Sigma)$. В ролята на матрица $\mathbf{A}$ може да се вземе $\Sigma^{1/2}$.

2.5. Разлагане на детерминантата на матрица с разпределение $\Psi(p, n)$

Разглежда се матрица $\mathbf{M}(p)$ с разпределение $\Psi(p, n)$ и елементи $\nu_{ij}(p)$, изразени чрез независимите случайни величини $\eta_i(p-m)$, дефинирани в (2.15). Ако има една реализация на случайните величини $\eta_i(p-m)$ и тази реализация е означена $\eta_i(p-m)(\omega)$, $p = 2, 3, \dots$, $0 \leq m \leq p-2$, $1 \leq i \leq p-m-1$, то тогава с тези реални числа може да се даде една реализация $\mathbf{M}(p)(\omega)$ на случайната матрица $\mathbf{M}(p)$. За краткост $\eta_i(p-m)(\omega)$ ще бъдат означавани $\bar{\eta}_i(p-m)$ и $\mathbf{M}(p)(\omega)$ като $\bar{\mathbf{M}}(p)$.

Действително с числата

$$\bar{\nu}_{1j}(p) = \bar{\eta}_{j-1}(p), \quad 2 \leq j \leq p$$

$$\bar{\nu}_{ij}(p) = \bar{\eta}_{i-1}(p) \bar{\eta}_{j-1}(p) + \bar{\nu}_{i-1, j-1}(p-1) \sqrt{1-\bar{\eta}_{i-1}^2(p)} \sqrt{1-\bar{\eta}_{j-1}^2(p)}, \quad 2 \leq i < j \leq p$$

се получава една неслучайна матрица $\bar{\mathbf{M}}(p)$. Тази матрица е положително определена симетрична матрица с единици по главния диагонал. Положителната определеност на $\bar{\mathbf{M}}(p)$ следва от Лема 2.3.1 и Лема 2.3.2.

Теорема 2.5.1. За детерминантата на матрица $\overline{\mathbf{M}}(p)$ е в сила следното представяне

$$\det(\overline{\mathbf{M}}(p)) = \prod_{m=0}^{p-2} \prod_{i=1}^{p-m-1} (1 - \bar{\eta}_i^2(p-m)).$$

2.6 Някои свойства на независимите случайни величини, участващи в разложението на случайни матрици с Уишарт разпределение

В този параграф се разглежда връзката между разпределението на случайните величини $\eta_i(p-m)$ от (2.15) и симетричното Бета разпределение .

Твърдение 2.6.1. Разпределението на случайна величина η с плътност

$$f_{\eta}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}} I_{(-1,1)}(x) \quad (2.23)$$

може да се представи като Бета разпределение в интервала $(-1,1)$, с параметри равни на $\frac{n-1}{2}$, $\eta \sim \mathbf{Beta}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$.

Твърдение 2.6.2. Случайна величина $1-\eta^2$, където η е с плътност от вида (2.25) има Бета разпределение с параметри $\frac{n-1}{2}$ и $\frac{1}{2}$, $1-\eta^2 \sim \mathbf{Beta}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

От Твърдение 2.6.1 следва, че случайните величини, въведени в (2.15), имат следната връзка със симетричното Бета разпределение в интервала $(-1,1)$:

$$\eta_i(p-m) \sim \mathbf{Beta}(\alpha_m, \alpha_m), \quad (2.24)$$

където $\alpha_m = \frac{n-m-1}{2}$, $0 \leq m \leq p-2$.

Твърдение 2.6.3. Ако $\eta_1(3), \eta_2(3), \nu_{12}(2) = \eta_1(2)$ са независими случайни величини с плътности съответно:

$$f_{\eta_i(3)}(x_i) \propto (1-x_i^2)^{\frac{n-3}{2}} I_{(-1,1)}(x_i), \quad x_i \in \mathbb{R}^1, \quad i=1,2$$

$$f_{\nu_{12}(2)}(x) \propto (1-x^2)^{\frac{n-4}{2}} I_{(-1,1)}(x),$$

то случайната величина $\nu_{23}(3) = \eta_1(3) \eta_2(3) + \nu_{12}(2) \sqrt{1 - \eta_1^2(3)} \sqrt{1 - \eta_2^2(3)}$ има същото разпределение както $\eta_1(3)$ и $\eta_2(3)$.

Представено е подробно доказателство на Твърдение 2.6.3, но твърдението лесно следва от факта, че при $p = 3$ формула (2.12) за разпределението $\Psi(p, n)$ показва, че случайните величини $\{\nu_{ij}(3), 1 \leq i < j \leq 3\}$ са симетрично зависими. Следователно те са еднакво разпределени.

Резултатите от втора глава са публикувани в [1], [2], [3].

ГЛАВА 3. РАЗЛАГАНЕ НА ОБОБЩЕНО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ НА УИШАРТ

В тази глава са представени основни резултати, свързани с обобщеното Уишарт разпределение, което се получава от класическото Уишарт разпределение, следвайки разширението на χ_n^2 разпределението до Гама разпределение.

3.1. Обобщено разпределение на Уишарт

Дефиниция 3.1.1. Ще казваме, че случайната матрица $\mathbf{W} = (w_{ij})$ с размерност $p \times p$ има обобщено разпределение на Уишарт с параметри α , p и Σ , $\mathbf{W} \sim W_p(\alpha, \Sigma)$, ако нейната плътност на разпределение на вероятностите се дава с формулата

$$f_{\mathbf{W}}(\mathbf{X}_p) \propto (\det \mathbf{X}_p)^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{2} \text{tr}(\Sigma^{-1} \mathbf{X}_p)} I_A(\mathbf{X}_p), \quad (3.1)$$

където α е реално положително число, p е цяло положително число, Σ е положително определена матрица от ред p , $\mathbf{X}_p$ е симетрична положително определена матрица от ред p , $\text{tr}(\cdot)$ е следа на матрица, A множеството на всички симетрични положително определени матрици от ред p , $I_A(\cdot)$ е индикатор-функция на множеството A .

Като се вземе предвид симетрията на $\mathbf{X}_p$ съвместната плътност $f_{\mathbf{w}}(\mathbf{X}_p)$ е в действителност съвместна плътност на случайните величини $\{w_{ij}, 1 \leq i \leq j \leq p\}$.

3.2. Разлагане на случайна матрица с обобщено разпределение на Уишарт

Нека случайната симетрична матрица $\mathbf{V}$ има вида

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \tau_1 & \nu_{12}\sqrt{\tau_1\tau_2} & \dots & \nu_{1p}\sqrt{\tau_1\tau_p} \\ \nu_{12}\sqrt{\tau_1\tau_2} & \tau_2 & \dots & \nu_{2p}\sqrt{\tau_2\tau_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{1p}\sqrt{\tau_1\tau_p} & \nu_{2p}\sqrt{\tau_2\tau_p} & \dots & \tau_p \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

където $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$ са независими и еднакво Гама-разпределени случайни величини с параметър на формата $\frac{2\alpha+p-1}{2}$ и скален параметър $\frac{1}{2}$ т.е.

$$\tau_i \sim \Gamma\left(\frac{2\alpha+p-1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Предполага се, че множеството от случайни величини $\{\nu_{ij}, 1 \leq i < j \leq p\}$ и множеството $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p\}$ са също независими. Нека съвместната плътност на случайната матрица

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \nu_{12} & \dots & \nu_{1p} \\ \nu_{12} & 1 & \dots & \nu_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{1p} & \nu_{2p} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

е

$$f_{\mathbf{M}}(\mathbf{Y}_p) \propto [\det(\mathbf{Y}_p)]^{\alpha-1} I_{B_p}(\mathbf{Y}_p), \quad (3.4)$$

където матрицата

$$\mathbf{Y}_p = \begin{pmatrix} 1 & y_{12} & \dots & y_{1p} \\ y_{12} & 1 & \dots & y_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1p} & y_{2p} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

е реална симетрична с размерност $p \times p$; B_p е множеството от всички симетрични положително определени матрици от ред p , с единици по главния диагонал; $I_{B_p}(\cdot)$ е индикатор-функцията на множеството B_p .

Теорема 3.2.1. Ако $\mathbf{S}$ има обобщено разпределение на Уишарт $W_p(\alpha, \mathbf{I})$, където $\mathbf{I}$ е единичната матрица от ред p , тогава матриците $\mathbf{S}$ и $\mathbf{V}$ съвпадат по разпределение ($\mathbf{S} \stackrel{d}{=} \mathbf{V}$).

Матрицата $\mathbf{V}$ може да се разложи по следния начин

$$\mathbf{V} \stackrel{d}{=} \text{diag}(\sqrt{\tau_1}, \sqrt{\tau_2}, \dots, \sqrt{\tau_p}) \mathbf{M} \text{diag}(\sqrt{\tau_1}, \sqrt{\tau_2}, \dots, \sqrt{\tau_p}), \quad (3.5)$$

Означаваме с $\Psi(p, \alpha)$ разпределението с плътност $f_{\mathbf{M}}(\mathbf{Y}_p)$ от (3.4), подобно на разпределението $\Psi(p, n)$ от §2.2 на Глава 2.

3.3. Представяне на елементите на случайна матрица с разпределение $\Psi(p, \alpha)$ чрез независими случайни величини

Нека независимите случайни величини

$$\eta_i(p-m), \quad \text{за } p=2,3, \dots, \quad 0 \leq m \leq p-2, \quad 1 \leq i \leq p-m-1 \quad (3.6)$$

имат плътности в интервала $(-1,1)$ от вида

$$f_{\eta_i(p-m)}(x) = \frac{\Gamma\left(\alpha_m + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha_m)} (1-x^2)^{\alpha_m-1} I_{(-1,1)}(x), \quad (3.7)$$

където

$$\alpha_m = \alpha - 1 + \frac{p-m}{2}, \quad 0 \leq m \leq p-2, \quad (3.8)$$

α е реално положително число, $I_{(-1,1)}(x)$ е индикатор-функцията на интервала $(-1,1)$. Тези плътности може да се разглеждат като плътност на симетрично Бета разпределение $\text{Beta}(\alpha_m, \alpha_m)$ в интервала $(-1, 1)$.

Въвеждат се последователно случайните величини:

$$\text{за } p=2 \quad (3.9)$$

$$v_{12}(2) = \eta_1(2)$$

$$\text{за } p=3$$

$$\nu_{12}(3) = \eta_1(3), \quad \nu_{13}(3) = \eta_2(3),$$

$$\nu_{23}(3) = \eta_1(3)\eta_2(3) + \nu_{12}(2)\sqrt{1-\eta_1^2(3)}\sqrt{1-\eta_2^2(3)};$$

.....

.....

за $p-1$

$$\nu_{1j}(p-1) = \eta_{j-1}(p-1), \quad 2 \leq j \leq p-1$$

$$\nu_{ij}(p-1) = \eta_{i-1}(p-1)\eta_{j-1}(p-1) + \nu_{i-1,j-1}(p-2)\sqrt{1-\eta_{i-1}^2(p-1)}\sqrt{1-\eta_{j-1}^2(p-1)} \quad 2 \leq i < j \leq p-1$$

за p

$$\nu_{1j}(p) = \eta_{j-1}(p), \quad 2 \leq j \leq p$$

$$\nu_{ij}(p) = \eta_{i-1}(p)\eta_{j-1}(p) + \nu_{i-1,j-1}(p-1)\sqrt{1-\eta_{i-1}^2(p)}\sqrt{1-\eta_{j-1}^2(p)}, \quad 2 \leq i < j \leq p$$

и т.н., с които се образуват случайните матрици

$$\mathbf{M}(p) = \begin{pmatrix} 1 & \nu_{12}(p) & \dots & \nu_{1p}(p) \\ \nu_{12}(p) & 1 & \dots & \nu_{2p}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{1p}(p) & \nu_{2p}(p) & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad p = 2, 3, \dots$$

Теорема 3.3.1. Нека $\eta_1(p), \eta_2(p), \dots, \eta_{p-1}(p)$ са независими и еднакво разпределени случайни величини с плътност

$$f_{\eta_i(p)}(x) = \frac{\Gamma\left(\alpha_0 + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha_0)} (1-x^2)^{\alpha_0-1} I_{(-1,1)}(x), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad i = 1, \dots, p-1,$$

където α_0 има вида

$$\alpha_0 = \alpha - 1 + \frac{p}{2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1, \quad \alpha > 0$$

Нека случайната матрица $\mathbf{M}(p-1)$ има разпределение $\Psi(p-1, \alpha)$ и множествата $\{\eta_i(p), i = 1, \dots, p-1\}$ и $\mathbf{M}(p-1)$ са независими. Тогава случайната матрица $\mathbf{M}(p)$ с елементи $\nu_{ij}(p)$, получени по формулите

$$\nu_{1j}(p) = \eta_{j-1}(p), \quad 2 \leq j \leq p$$

$$v_{ij}(p) = \eta_{i-1}(p)\eta_{j-1}(p) + v_{i-1,j-1}(p-1)\sqrt{1-\eta_{i-1}^2(p)}\sqrt{1-\eta_{j-1}^2(p)}, \quad 2 \leq i < j \leq p$$

има съвместно разпределение $\Psi(p, \alpha)$.

Теорема 3.3.2. *Симетрична случайна матрица*

$$\mathbf{M}(p) = \begin{cases} 1, & i = j \\ v_{ij}(p), & i \neq j \end{cases}, \quad 1 \leq i, j \leq p,$$

с елементи $v_{ij}(p)$, получени по формули (3.9), има разпределение $\Psi(p, \alpha)$ за $p = 2, 3, \dots$.

В следващата теорема се показва, как елементите на матрицата $\mathbf{M}(p)$ се изразяват чрез независимите случайни величини $\eta_i(p-m)$, дефинирани в (3.6).

Теорема 3.3.3. *Случайните величини $v_{ij}(p)$, $p = 2, 3, \dots$, $1 \leq i < j \leq p$, елементи на матрицата $\mathbf{M}(p)$, $p = 2, 3, \dots$, получени по рекурентните връзки (3.9) се изразяват чрез независимите случайни величини $\eta_i(p-m)$, дефинирани в (3.6), $p = 2, 3, \dots$, $0 \leq m \leq p-2$, $1 \leq i \leq p-m-1$ по следния начин:*

$$v_{ij}(p) = \eta_{i-1}(p)\eta_{j-1}(p) \tag{3.13}$$

$$+ \sum_{m=2}^i \left\{ \eta_{i-m}(p-m+1)\eta_{j-m}(p-m+1) \prod_{k=1}^{m-1} \sqrt{1-\eta_{i-k}^2(p-k+1)} \sqrt{1-\eta_{j-k}^2(p-k+1)} \right\}, \quad 1 \leq i < j \leq p,$$

където $\eta_0(p) \equiv 1$, $v_{0j}(p) \equiv 1$, $1 \leq j \leq p$, $p = 1, 2, \dots$.

Може да се покаже, като се използват Лема 2.3.1 и Лема 2.3.2., че всяка една реализация на матрица $\mathbf{M}(p)$ е положително определена симетрична матрица, чиито елементи по главния диагонал са равни на 1.

Разгледаното разлагане се отнася не само за случайни матрици $\mathbf{S} \sim W_p(\alpha, \mathbf{I})$, а и за случайни матрици $\mathbf{W} \sim W_p(\alpha, \mathbf{\Sigma})$, тъй като разпределенията на $\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}'$ и $\mathbf{W}$ съвпадат, когато $\mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{\Sigma}$.

Резултатите от трета глава са публикувани в [4].

ГЛАВА 4. ПРИЛОЖЕНИЕ НА УИШАРТ РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ И НЕГОВОТО РАЗЛАГАНЕ

4.1. Един метод за пресмятане на моменти на Уишарт матрица

В този параграф са пресметнати моменти $E(\mathbf{W}^2)$, $E(\mathbf{W}^{-2})$ където $\mathbf{W}$ е с Уишарт разпределение $W_2(n, \Sigma)$ и $E(\mathbf{W}^{-1})$, където $\mathbf{W}$ е с Уишарт разпределение $W_3(n, \Sigma)$. При пресмятането е използвано разлагането на Уишарт матрица, изложено в глава 2. Получените резултати са сравнени със съществуващи в литературата резултати.

Представен е метод за пресмятане на многомерни моменти на случайна матрица с разпределение на Уишарт. Използва се изразяването на елементите на Уишарт матрицата като функции от независими случайни величини. По този начин пресмятанията се свеждат до пресмятане на математическите очаквания на няколко случайни величини, за които са изведени формули. Методът лесно може да бъде програмиран за компютърни пресмятания.

Дефиниция 4.1. Многомерен момент от ред k за случайна матрица $\mathbf{W}$ с разпределение на Уишарт $W_p(n, \Sigma)$ се нарича величината $E(W_{i_1 j_1} \dots W_{i_k j_k})$, където за $l=1, \dots, k$, (i_l, j_l) е от декартовото произведение $\{1, \dots, p\}^2$, k - цяло положително число.

Аналогично очакваната стойност $E(W_{i_1 j_1}^{-1} \dots W_{i_k j_k}^{-1})$ се нарича момент на $\mathbf{W}^{-1}$ от ред k .

Нека $\mathbf{W} \sim W_p(n, \Sigma)$, където $\Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}'$, $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$. Като използваме връзката $\mathbf{W} = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}'$, където $\mathbf{S} \sim W_p(n, \mathbf{I})$ и Теорема 2.2.1, Теорема 2.3.1, Теорема 2.4.2 лесно се вижда, че произведението $W_{i_1 j_1} \dots W_{i_k j_k}$ може да бъде представено като сума от произведения на елементите

$$a_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, p;$$

$$\tau_i, \quad 1 \leq i \leq p;$$

$$v_{ij}(p), \quad 1 \leq i < j \leq p, \quad p = 2, 3, \dots,$$

където случайните величини $\tau_i, 1 \leq i \leq p$ са χ_n^2 разпределени, а величините

$v_{ij}(p)$ имат вида

$$\begin{aligned} v_{ij}(p) = & \eta_{i-1}(p) \eta_{j-1}(p) \\ & + \overline{\eta_{i-1}(p)} \overline{\eta_{j-1}(p)} \eta_{i-2}(p-1) \eta_{j-2}(p-1) \\ & + \dots \\ & + \overline{\eta_{i-1}(p)} \overline{\eta_{j-1}(p)} \overline{\eta_{i-2}(p-1)} \overline{\eta_{j-2}(p-1)} \dots \overline{\eta_{i-i+2}(p-i+2)} \overline{\eta_{j-i+1}(p-i+2)} \eta_{j-i}(p-i+1), \end{aligned}$$

където $\overline{\eta_i(p-m)} = \sqrt{1 - \eta_i^2(p-m)}$, $p = 2, 3, \dots$, $0 \leq m \leq p-2$, $1 \leq i \leq p-m-1$.

При умножението на степени на величините $v_{ij}(p)$ се получава сума от

произведения, в които участват независимите случайни величини $\eta_i(p-m)$,

$0 \leq m \leq p-2$, $1 \leq i \leq p-m-1$, $p = 2, 3, \dots$ и функции от тях. Така намирането на многомерни моменти от ред k

$$E(W_{i_1 j_1} \dots W_{i_k j_k})$$

се свежда до изчисляване на очакванията на следните независими случайни величини

$$\eta_i^q(p-m), \quad \sqrt{1 - \eta_i^2(p-m)}^s, \quad \eta_i^q(p-m) \sqrt{1 - \eta_i^2(p-m)}^s,$$

$$0 \leq m \leq p-2, \quad 1 \leq i \leq p-m-1, \quad p = 2, 3, \dots$$

$$\tau_i \quad \text{и} \quad \tau_i^{\frac{r}{s}}, \quad 1 \leq i \leq p,$$

които са с познати разпределения.

Формулите, изведени за тези очаквания са:

$$E(\eta_i^q(p-m)) = \begin{cases} \frac{(n-m-2)!!(q-1)!!}{(n-m+q-2)!!}, & q = 2k \\ 0, & q = 2k+1. \end{cases}$$

$$E\left(\sqrt{1-\eta_i^2(p-m)}^s\right) = \Delta \frac{(n-m-2)!! (n-m+s-3)!!}{(n-m-3)!! (n-m+s-2)!!} \Delta = \begin{cases} 1, & s \text{ четно} \\ \frac{2}{\pi}, & s \text{ нечетно, } n-m \text{ четно} \\ \frac{\pi}{2}, & s \text{ нечетно, } n-m \text{ нечетно} \end{cases}$$

$$E\left(\eta_i^q(p-m)\sqrt{1-\eta_i^2(p-m)}^s\right) = \Delta \frac{(n-m-2)!! (n-m+s-3)!! (q-1)!!}{(n-m-3)!! (n-m+s+q-2)!!},$$

където

$$\Delta = \begin{cases} 1, & q \text{ четно, } s \text{ четно} \\ \frac{2}{\pi}, & q \text{ четно, } s \text{ нечетно, } n-l \text{ четно} \\ \frac{\pi}{2}, & q \text{ четно, } s \text{ нечетно, } n-l \text{ нечетно} \\ 0, & q \text{ нечетно} \end{cases}.$$

4.2. Генериране на случайни матрици с обобщено Уишарт разпределение

В този параграф е показано как може да се получат реализации на случайна матрица с разпределение на Уишарт $W_p(\alpha, \mathbf{I})$, p е цяло число, $p > 1$ и α е реално положително число. Използва се конструкцията, представена в Теорема 3.1.3, за получаване на случайни матрици $\mathbf{M}(p)$ с разпределение $\Psi(p, \alpha)$. Нека $q(p)$, $p = 2, 3, \dots$, е вектор-стълб с размерност $p-1$ и с елементи случайните величини $\eta_1(p), \eta_2(p), \dots, \eta_{p-1}(p)$ от (3.6)

$$q(p) = (\eta_1(p), \dots, \eta_{p-1}(p))'.$$

Нека $\mathbf{N}(p)$ е диагонална случайната матрица от ред $p-1$

$$\mathbf{N}(p) = \text{diag}\left(\sqrt{1-\eta_1^2(p)}, \dots, \sqrt{1-\eta_{p-1}^2(p)}\right),$$

където $\eta_i(p)$, $i = 1, 2, \dots, p-1$ са елементите на вектора $q(p)$.

Образува се матрица $\mathbf{Q}(p)$ с размерност $(p-1) \times (p-1)$

$$\mathbf{Q}(p) = q(p)q'(p) + \mathbf{N}(p)\mathbf{M}(p-1)\mathbf{N}(p).$$

Тогава случайната матрица $\mathbf{M}(p)$, $p = 2, 3, \dots$ може да бъде формирана по следния начин.

$$\mathbf{M}(p) = \begin{pmatrix} 1 & q'(p) \\ q(p) & \mathbf{Q}(p) \end{pmatrix},$$

като $\mathbf{M}(1)=1$. Така получената матрица $\mathbf{M}(p)$ е с разпределение $\Psi(p, \alpha)$, α реално положително число.

Генерирането се осъществява по следния начин. Започва се с $y_1^{(2)}$ - една реализация на случайната величина $\eta_1(2) \sim \text{Beta}(\alpha, \alpha)$. Така може да се конструира симетричната матрица

$$\mathbf{M}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & y_1^{(2)} \\ y_1^{(2)} & 1 \end{pmatrix},$$

която се явява реализация на матрицата $\mathbf{M}(2)$ за $p=2$. За $k=2, 3, \dots, p-1$ се генерират $y_1^{(k+1)}, y_2^{(k+1)}, \dots, y_k^{(k+1)}$, които са реализации на независимите случайни величини $\eta_1(k+1), \eta_2(k+1), \dots, \eta_k(k+1)$ с разпределение $\text{Beta}(\alpha_k, \alpha_k)$, $\alpha_k = \alpha + \frac{k-1}{2}$. С тяхна помощ получаваме числата

$$z_{ij}^{(k+1)} = y_{i-1}^{(k+1)} y_{j-1}^{(k+1)} + z_{i-1, j-1}^{(k+1)} \sqrt{1 - \left(y_{i-1}^{(k+1)}\right)^2} \sqrt{1 - \left(y_{j-1}^{(k+1)}\right)^2}$$

за $2 \leq i < j \leq k+1$, които се явяват реализации на случайните величини $v_{ij}(k+1)$,

$2 \leq i < j \leq k+1$. Така на всяка стъпка се получава симетрична матрица

$$\mathbf{M}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 1 & y_1^{(k+1)} & y_2^{(k+1)} & \dots & y_k^{(k+1)} \\ & 1 & z_{23}^{(k+1)} & \dots & z_{2, k+1}^{(k+1)} \\ & & 1 & \dots & z_{3, k+1}^{(k+1)} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

от ред $k+1$. Като краен резултат се получава симетрична матрица $\mathbf{M}^{(p)}$ от ред p - една реализация на разпределението $\Psi(p, \alpha)$. За да има реализация на разпределението на Уишарт е необходимо да се генерират p на брой числа

$t_1, t_2, \dots, t_p$, получени от разпределението $\Gamma\left(\frac{2\alpha + p - 1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и да се образува диагонална матрица $\mathbf{T} = \text{diag}(\sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}, \dots, \sqrt{t_p})$. Матрицата $\mathbf{S} = \mathbf{T} \mathbf{M}^{(p)} \mathbf{T}'$ е с разпределение на Уишарт $W_p(\alpha, \mathbf{I})$.

Методът може да се използва за генериране на положително определени матрици с единици по главния диагонал и елементи, извън главния диагонал, принадлежащи на интервала $(-1, 1)$ т.е. на корелационни матрици $\mathbf{R}$, чиято плътност е пропорционална на $(\det \mathbf{R})^{\alpha-1}$.

4.3 Оценяване на ковариационна и корелационна матрици на многомерна нормална извадка с помощта на разпределение на Уишарт

В този параграф са представени техниките за оценяване на вектора на средните μ , корелационната матрица ρ и ковариационната матрица Σ на многомерна нормална извадка и са приложени тези техники, като се използва софтуерния пакет STATISTICA 13.0 и системата за компютърна алгебра Maple. Разглежда се извадка, съдържаща $n=50$ седмични наблюдения на възвръщаемостта (в проценти) за всеки $p=10$ портфейла от акции, съставени от акции на фондовите борси в Торонто, публикувани в [11]. Тъй като матрицата от данни $\mathbf{X}(n \times p)$ се получава като произволна извадка от многомерна нормална популация, ковариационната матрица има p -мерно Уишарт разпределение с $(n-1)$ степени на свобода. Това разпределение на Уишарт може да се използва за изводи за ковариационната матрица.

Резултатите от четвърта глава са публикувани в [3], [4],[5].

НАУЧНО-ПРИЛОЖНИ И ПРИЛОЖНИ ПРИНОСИ

Основните приноси в представения дисертационен труд според автора са:

1. Получено е разлагане на случайни матрици с класическо Уишарт разпределение $W_p(n, \Sigma)$, n цяло число, $n \geq p$, чрез диагонални матрици, чиито елементи са хи-квадрат разпределени и симетрична матрица $\mathbf{M}$ с разпределение

$$f_{\mathbf{M}}(\mathbf{Y}_p) \propto [\det(\mathbf{Y}_p)]^{\frac{n-p-1}{2}} I_B(\mathbf{Y}_p)$$

за което е въведено означението $\Psi(p, n)$.

2. Получено е разлагане на случайни матрици с обобщено Уишарт разпределение $W_p(\alpha, \Sigma)$, α реално положително число, чрез диагонални матрици, чиито елементи са Гама разпределени и симетрична матрица $\mathbf{M}$ с разпределение

$$f_{\mathbf{M}}(\mathbf{Y}_p) \propto [\det(\mathbf{Y}_p)]^{\alpha-1} I_{B_p}(\mathbf{Y}_p),$$

за което е въведено означението $\Psi(p, \alpha)$.

3. Намерена е рекурентна връзка между случайни матрици с разпределения $\Psi(p-1, n-1)$ и $\Psi(p, n)$, където n е цяло число, $n \geq p$. Намерена е такава рекурентна връзка и в случая, когато вторият параметър е реално положително число.
4. Намерено е представяне на елементите на случайна матрица с разпределение $\Psi(p, n)$ и $\Psi(p, \alpha)$ чрез функции от независими случайни величини. Дадени са плътностите на тези независими случайни величини.
5. Представен е метод за намиране на многомерни моменти на Уишарт матрица, при който се използва изведеното представяне на Уишарт матрицата чрез независими случайни величини.

6. Представен е алгоритъм за генериране на случайни матрици с обобщено Уишарт разпределение $W_p(\alpha, \Sigma)$, където параметърът α е реално положително число.

СПИСЪК НА ПУБЛИКАЦИИТЕ ПО ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

1. Ignatov Tz., Nikolova A. About Wishart's Distribution. *Annuaire Univ. Sofia, Fac. of Econ. & Buss. Admin.*, **3**, (2004), 79-93.(на български)
2. Ignatov Tz., Nikolova A. Decomposition of the Wishart Distribution. *Annuaire Univ. Sofia, Fac. of Econ. & Buss.Admin.* **4**, (2005), 131-147.
3. Nikolova A. Evalution the moments of the Wishart distribution . *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, **15**(2), (2007), 171-186. [Zbl 1137.62032](https://zbmath.org/journal/1137.62032)
4. Nikolova A. One method for generating random matrices with Wishart distribution. *Third International Scientific Congress, Proceedings, TU-Varna*, 2012, v.VII, 251 - 256.(на български)
5. Nikolova, A., Prodanova, Kr. Inference for the covariance and correlation matrices of multivariate sample using Wishart distribution. *AIP Conference Proceedings* **2333**, 150002 (2021); <https://doi.org/10.1063/5.0042853>

ЗАБЕЛЯЗАНИ ЦИТИРАНИЯ

Статия [1] е цитирана в:

1. Veleva, E. Joint densities of correlation coefficients for samples from multivariate standard normal distribution. *Pliska Stud. Math. Bulgar.*, **18** (2007), 379-386.
2. Veleva, E. A Representation of the Wishart Distribution by Functions of Independent Random Variables. *Annuaire de l'Universite de Sofia "St.Kliment Ohridski", Faculte des Sciences Economiques et de Gestion*, **6** (2007), 59 – 68.
3. Veleva, E. Some New Properties of Wishart Distribution. *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 2, 2008, no. 54, 2673 - 2682.

БЛАГОДАРНОСТИ

Изказвам своята благодарност на научните си ръководители проф. Красимира Проданова и доц. Мариан Милев за съдействието и подкрепата, която ми оказаха.

Благодаря и на доц. Цветан Игнатов за съвместната ни работа, която беше много полезна за мен.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Anderson, T. W. *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. N. Y., John Wiley & Sons, 1984.
- [2] Bagai, O. P. On the exact distribution of the ratio of $(p \times p)$ generalized sample variance to any of principal minors. *Trab. estadist. y invest. oper.*, **23**(3), (1972), 47-56.
- [3] Bru, M. Wishart processes. *Journal of Theoretical Probability*, **4**, (1991), 725–751.
- [4] Dawid, A.P. Some matrix-variate distribution theory: notational considerations and a Bayesian application. *Biometrika*, **68**, (1981), 265-274.
- [5] Eaton, M. L. *Multivariate Statistics*. N. Y., John Wiley & Sons, 1983.
- [6] Graczyk, P., Letac, G., Massam, H. Hyperoctahedral group, symmetric group representations and the moments of the real Wishart distribution. *J. Theoret. Prob.*, **18**, (2005), 1-42.
- [7] Graczyk, P., Letac, G., Massam, H. The complex Wishart distribution and the symmetric group. *Ann. Statist.*, **31**, (2003), 287-309.
- [8] Graczyk, P., Małeck, J., Mayerhofer, Eberhard. A characterization of Wishart processes and Wishart distributions. *Stochastic Processes and their Applications.*, Elsevier, vol. **128**(4), (2018), 1386-1404
- [9] Haagerup, U., Thorbjørnsen, S. Random Matrices with Complex Gaussian Entries. *Expo. Math.*, **21**(4), (2003), 293-337.

- [10] Holgersson, T., Pielaszkiewicz, J. A Collection of Moments of the Wishart Distribution. *Recent Developments in Multivariate and Random Matrix Analysis*. Springer International Publishing, (2020), 147-162.
- [11] Jobson, J. D. *Applied Multivariate Data Analysis*. v.2 *Categorical and Multivariate Methods*. N.Y., Springer-Verlag, 1992.
- [12] Krishnamoorthy, K., Mathew, T. Comparison of approximation methods for computing tolerance factors for a multivariate normal population. *Technometrics*, **41**(3), (1999), 234-249.
- [13] Kushner, H. B., Meisner, M. Eigenvalues of expected value operators in the Wishart distribution. *Ann. Statist.*, **8**(5), (1980), 977-988.
- [14] Letac, G., Massam, H. Representations of the Wishart distributions. *Contemp. Math.*, **261**, (2000), 121-142.
- [15] Letac, G., Massam, H. Les moments des lois de Wishart, les arbres binaires et les produits triples. *Comptes R. Acad. Paris, Série I.*, **333**, (2001), 377-382.
- [16] Letac, G., Massam, H. All invariant moments of the Wishart distribution. *Scand. J. of Statist.*, **31**(2), (2004), 295-318.
- [17] Letac, G. Interpolation of the Wishart and non central Wishart distributions. *Institut de mathématiques de Toulouse, School - Mathematical Methods of Statistics*, 2016.
- [18] Massam, H. An exact decomposition theorem and a unified view of some related distributions for a class of exponential transformation models on symmetric cones. *Ann. Statist.*, **22**, (1994), 369-394.
- [19] Philipov, A., Glickman, M. E. Multivariate stochastic volatility via Wishart processes. *Journal of Business and Economic Statistics* **24**, (2006), 313-328.
- [20] Philipov, A., Glickman, M. E. Factor multivariate stochastic volatility via Wishart processes. *Econometric Reviews* **25**(2-3), (2006), 311-334.
- [21] Veleva, E. Joint densities of correlation coefficients for samples from multivariate standard normal distribution. *Pliska Stud. Math. Bulgar.*, **18** (2007), 379-386.

- [22] Veleva, E. Some marginal densities of the Wishart distribution. *Math. and Education in Math.*, 41, (2012), 273-278.
- [23] von Rosen, D. Moments of maximum likelihood estimators in the growth curve model. *Statistics*, **22**, (1991), 111-131.
- [24] von Rosen, D. Distribution and density approximations of a maximum likelihood estimator in the growth curve model. *Statistics*, **29**, (1997), 37-59.

SUMMARY

Wishart distribution and application

Anna Dimitrova Nikolova

The dissertation presents a decomposition of a random matrix with a classical Wishart distribution and a random matrix with a generalized Wishart distribution. It has been shown that the following decomposition is valid for a matrix $\mathbf{S}$ with a Wishart distribution

$$\mathbf{S} \stackrel{d}{=} \text{diag}(\sqrt{\tau_1}, \sqrt{\tau_2}, \dots, \sqrt{\tau_p}) \mathbf{M}(p) \text{diag}(\sqrt{\tau_1}, \sqrt{\tau_2}, \dots, \sqrt{\tau_p}),$$

where the random variables $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p\}$ are independent of the random variables involved in the symmetric matrix $\mathbf{M}(p)$. In the classical Wishart distribution, the quantities τ_i , $i=1, \dots, p$ are independent chi-square distributed. In the generalized Wishart distribution they are independent and follow a Gamma distribution.

The elements of the random matrix $\mathbf{M}(p)$ are represented by independent random variables. The distribution of these independent random variables for classical Wishart and for generalized Wishart distribution was found. The representation is based on a recurrent connection, derived in the dissertation, between a matrix $\mathbf{M}(p)$ of size $p \times p$ and a matrix $\mathbf{M}(p-1)$ of size $(p-1) \times (p-1)$, for $p=2, 3, \dots$.

The found representation of the elements of the Wishart matrix by independent random variables is applied to the calculation of product moments. This way, the calculations are reduced to the calculation of moments of a limited number of independent random variables, for which formulas are derived.

The derived recurrent connection is applied to generate matrices with generalized Wishart distribution, where the degrees of freedom are not integer.