

РЕЦЕНЗИЯ

Върху дисертационен труд за придобиване на образователна и научна степен „Доктор“
в област на висше образование 4 Природни науки, математика и информатика,
професионално направление 4.5 Математика,
докторска програма „Математическо моделиране и приложение на математиката“

Автор на дисертационния труд: маг. мат. Боян Светославов Костадинов
Тема на дисертационния труд: **Изследване свойствата на основни състояния на някои елиптични уравнения. Оптимизиращи функции на интерполационни неравенства от тип Харди-Соболев**

Рецензент: доц. дмн Огнян Йорданов Каменов – ФПМИ, ТУ-София
Ръководител на катедра „Математически анализ и диференциални уравнения“,
e-mail: okam@abv.bg

Представеният от докторанта Боян Костадинов научен труд „Изследване свойствата на основни състояния на някои елиптични уравнения. Оптимизиращи функции на интерполационни неравенства от тип Харди–Соболев“ е с обем от 119 страници, структуриран в Увод и пет основни глави, заключителни бележки с основните приноси на дисертационния труд и библиография, съдържаща 69 заглавия.

Актуалност на темата: В дисертационния труд са анализирани съществуването и единствеността на минимизиращи решения за функционала на Вайнщайн, приложен за определяне на оптималната константа в интерполационното неравенството на Галиардо-Ниренберг; получено е в явен вид минимизиращото решение и оптималната константа в неравенството на Харди-Литлууд-Соболев; доказано е съществуването на солитонни вълни за нелинейното уравнение на Шрьодингер–Шокар, съществуването на глобално решение за нелинейното уравнение на Шрьодингер-Хартри при определени предположения, както и орбиталната устойчивост на солитарните вълнови решения за това уравнение; разгледано е обобщеното уравнение на Клайн-Гордън-Хартри и е доказана орбиталната устойчивост за солитонните решения при определени изисквания за честотата ω , както и въпросът за силната неустойчивост на избухващите решения за това уравнение при експоненциална нелинейност $p \geq 2$. Към изследванията на нелинейното уравнение на Шрьодингер и неговите разнообразни нелинейни версии като уравнението на Шрьодингер-Хартри, обобщеното уравнение на Клайн-Гордън-Хартри и др., учените проявяват все по-нарастващ интерес още от 70-те години на миналия век, което е предизвикано най-вече поради многобройните математически модели в теоретичната физика, свързани с посочените нелинейни уравнения. Това обстоятелство прави разработената от дисертанта Боян Костадинов тема, възложена му от научния ръководител проф. Георги Венков актуална и вписваща се в най-съвременните постижения в тази област. Трябва изрично да подчертаем, че извършените анализи на описаните солитонни и избухващи

решения са направени в комплицираните случаи на пространствена размерност 3 и степенна нелинейност не по-малка от 2.

Степен на познаване на научния проблем: Степента на познаване, която показва докторантът за естеството на научната проблематика, проличава както от публикуваните му в съавторство статии в AIP Conference Proceedings, в Доклади на БАН и Годишника на ТУ-София, така и от подробния обзор, направен от него в Увода на дисертационния труд. Прецизните математически формулировки, до които се свеждат получените решения на конкретните нелинейни частни диференциални уравнения, показват една много добра степен на познание върху същността и детайлите на научния проблем. Особено показателно за високата математическата ерудиция на докторанта е доказателството на Теорема 3.3.1 (Гл. 3), с която се утвърждава орбиталната устойчивост на солитонните вълни за нелинейното уравнение на Шрьодингер-Шокар при посочените параметрични конфигурации в началото на т.3.3. От въпросната теорема следва, че вариационната задача с решение от типа „основно състояние“ има минимизиращи функции, които съответстват на солитонните вълни с орбитална устойчивост.

Основни задачи на дисертационния труд:

- Намиране на оптималната константа в интерполационното неравенство на Галиардо-Ниренберг и изчисляването ѝ в явен вид;
- Изследване на автономната система за намирането в явен вид на решение за уравнението на Шокар в критичния случай, когато $p=5$;
- Потвърждение на хипотезата за съществуване на глобално решение на нелинейното уравнение на Шрьодингер-Хартри в тримерния случай и при степени на нелинейност $p_2 = 7/3$ и $2 < p_1 < 8/3$;
- Доказване на съществуването на решение за минимизационната задача за определянето на минимума на съответстващия за уравнение то на Шрьодингер –Хартри функционал на енергията;
- В тримерния случай и при посочените условия за степените на нелинейност, да се докаже, че солитонните вълни, които са решения на нелинейното уравнение на Шрьодингер-Хартри са орбитално устойчиви;
- Изследване на солитонните вълни от тип „основно състояние“ за нелинейното уравнение на Клайн-Гордън-Хартри в „n“-мерния случай за орбитална неустойчивост, когато фазовата честота ω е в диапазона $[0,1)$;
- Анализирание на солитонните вълни за нелинейното уравнение на Клайн-Гордън-Хартри и установяване при какви конкретни изисквания за фазовата честота ω тези солитонни вълни са орбитално устойчиви. Установяване на корелация между орбиталната устойчивост на тези

вълни, с устойчивостта на солитонните вълни за обобщеното уравнение на Клайн-Гордън-Хартри;

- Изследване на силната неустойчивост чрез избухване на солитонното решение в контекста на обобщеното уравнение на Клайн-Гордън-Хартри в „ n “- мерния случай и степенна нелинейност $p \geq 2$.

Научни приноси: Поради относително самостоятелното естество на посочените по-горе основни задачи в дисертационната работа, научните приноси, които са фундамента в подобни научни монографии са разпределени пропорционално в отделните части според хронологията на поставените цели и различните математически подходи използвани от докторанта. По описаните по-горе осем научни задачи, поставени пред докторанта, са постигнати впечатляващи научни резултата, а именно:

По задача 1 - чрез прилагане на функционала на Вайнщайн е намерена оптималната константа в интерполационното неравенство на Галиардо-Ниренберг.

По задача 2 - разширявайки подхода за пресмятане на оптимална константа чрез изследването на автономната система е получено в явен вид решение на уравнението на Шокар в критичния случай $p=5$.

По задача 3 - доказано е съществуването на глобално решение на уравнението на Шрьодингер-Хартри в тримерния случай, при определени степени на нелинейност.

По задача 4 - приложен е вариационен подход и теоремата за профилна декомпозиция, за да се докаже съществуването на решение на минимизационната задача за енергийния функционал, съответстващ на нелинейното уравнение на Шрьодингер-Хартри.

По задача 5 - доказана е орбиталната устойчивост на солитонните вълни, които са решения на нелинейното уравнение на Шрьодингер-Хартри, при изискванията за степенните нелинейности и пространствена размерност 3.

По задача 6 - доказано е, че солитонните вълни от тип „основно състояние“, които са решения на обобщеното уравнение на Клайн-Гордън-Хартри в, са орбитално неустойчиви, когато фазовата честота ω е в диапазона $[0,1)$.

По задача 7 - за обобщеното уравнение на Клайн-Гордън-Хартри, при допускане на орбитална (не)устойчивост в класическия смисъл и при конкретни изисквания за фазовата честота ω , са дадени достатъчни условия за орбитална устойчивост на солитонните решения на това уравнение.

По задача 8 - доказано е, че солитонните вълни, които са решения на посоченото по-горе нелинейно уравнение са силно неустойчиви чрез избухване при степен на нелинейност $p \geq 2$, в определен честотен диапазон.

Считам че научните приноси на докторанта Боян Светославов Костадинов, демонстрирани в дисертационния му труд превишават необходимите научни изисквания за придобиването на образователната и научна степен „доктор“, както по Закона за развитието на академичния състав в Република България, така и според Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени в ТУ-София.

Степен на лично участие: Личното участие на докторанта при разработването на поставените научни задачи се подчертава от петте съавторски публикации, споменати в списъка с публикациите, така и с доказаните от него базови лема и теореми. Прави много добро впечатление, че е вложил много старание и труд за детайлното доказателство на някои ключови твърдения, като Теорема 3.3.1, Теорема 6.4.1, Теорема 6.4.2. и др., както и свързаните с тях кратки коментари и физически интерпретации.

Оценка на публикациите с участието на дисертанта: Както бе споменато по-горе докторантът Боян Костадинов е представил пет публикации, четири от които в съавторство с Георги Венков и Мирко Тарули, а петата статия е самостоятелна, публикувана в Годишника на Ту-София, vol. 69, Issue 3, 2019. Съвместните публикации на докторанта са публикувани в AIP Conference Proceedings в периода 2017 – 2019 г., а една публикация имат в Доклади на БАН, Sci., 72, pp 1177-1186, 2019. В посочените публикации е и фундаментът на дисертационния труд и отговарят на изискванията, които се предявяват към тях.

Оценка за съответствието на автореферата: Авторефератът на Дисертационния труд „Изследване свойствата на основни състояния на някои елиптични уравнения. Оптимизиращи функции на интерполационни неравенства от тип на Харди-Соболев“ съдържа 30 страници и 32 литературни източника. Той има монолитна структура и в съкратена форма са представени основните цели и резултати на дисертационния труд. Описани са използваните методи за научния анализ, както и обосноваването на тяхната необходимост.

Считам че Авторефератът на Боян Костадинов отразява правдиво съдържанието и постигнатите научни резултати в Дисертационния труд, поради което препоръчвам той да бъде публикуван в представената форма.

Препоръки и бележки: Имам някои препоръки към докторанта във връзка с форматирането на дисертационния труд. Утвърдената структура за посоченото научно описание е свързана с подразделяне по глави със съответното заглавие, а не с номерация по секции, което се прилага при научни публикации или монографии с по локално съдържание. Това създава по-голяма яснота за многообразието от научните постижения на автора. Уводът и заключителните бележки не се номерират, защото те нямат статут на глави от дисертационния труд. Заключителните бележки, означени с № 7 е неуместно да се заместват със списъка от научните приноси. Те би трябвало да са фрагмент от цялостното отношение на автора към научния

потенциал на дисертационната тематика, с оглед на бъдещи негови изследвания в тази област. Посочените структурни препоръки се отнасят и за представения Автореферат.

Изненадан съм, че в края на дисертацията авторът Боян Костадинов е пропуснал да изрази традиционното отношение на докторант към научният си ръководител, в случая проф. Георги Венков, за помощта и съдействието, което е получил от него. Мисля че това не е късно да се стори!

Заключение: Уповавайки се на направения по-горе анализ на научните приноси в тематиката на дисертационния труд, която е носител на висок дисертабилен потенциал, препоръчвам на уважаемото Научно жури да присъди на Боян Светославов Костадинов образователната и научна степен **“доктор”**, по професионално направление 4.5 Математика, докторска програма : „Математическо моделиране и приложение на математиката“.

25.08.2020 г.
С о ф и я

Рецензент:
(доц. дмн О. Каменов)

R E V I E W

On the PhD thesis for awarding the educational and scientific degree „Doctor“
In the scientific field 4 Natural Sciences, Mathematics and Informatics,
professional field 4.5 Mathematics,
doctoral program "Mathematical modelling and application of mathematics"

Author of the PhD thesis: Boyan Svetoslavov Kostadinov

PhD thesis topic: **Exploring ground state properties of certain elliptic equations. Optimising functions of Hartree-Sobolev type interpolation inequalities.**

Reviewer: Assoc. Prof., D.Sc. Ognyan Yordanov Kamenov

Head of the Department of Mathematical Analysis and Differential Equations,
Faculty of Applied Mathematics and Informatics, Technical University of Sofia.

e-mail: okam@abv.bg

The scientific work presented by the PhD student Boyan Kostadinov “Exploring ground state properties of certain elliptic equations. Optimising functions of Hartree-Sobolev type interpolation inequalities.” has a total volume of 119 pages. Its content includes an introduction and five main chapters, concluding remarks with the main contributions of the dissertation and bibliography containing 69 titles.

Relevance and significance of the problem. In the present PhD thesis have been analysed the existence and uniqueness of minimising solutions of the Weinstein functional which is applied to compute the optimal constant in the Gagliardo -Nirenberg interpolation inequality; the minimizing solution and the optimal constant in the Hardy-Littlewood-Sobolev inequality are obtained explicitly; the existence of soliton waves for the nonlinear equation of Schrödinger-Choquard has been considered; the existence of a global solution for the nonlinear Schrödinger-Hartree equation under certain assumptions has been also proved, as well as that the solitary waves solving it are orbitally stable; the generalized Klein-Gordon-Hartree equation has been considered and sufficient conditions are provided for orbital stability of solitary wave solutions of this equation, under certain requirements of the frequency ω , as well as the question of strong instability of the blow-up solitary waves solving this equation when the exponential nonlinearity is $p \geq 2$. Scientists have been showing increasing interest in the study of the nonlinear Schrödinger equation and its various nonlinear versions, such as the Schrödinger-Hartree equation, the generalized Klein-Gordon-Hartree equation, and others, which is mainly due to the numerous mathematical models in theoretical physics related to these nonlinear equations. This circumstance makes the topic developed by the author Boyan Kostadinov, assigned by his scientific supervisor Prof. Dr. G. Venkov, relevant and fitting into the latest achievements in this field. We must emphasize that the performed analyses of the described soliton and blow-up solutions are made in the complicated cases of spatial dimension 3 and degree nonlinearity not less than 2.

Awareness of the scientific problem. The level of knowledge that the PhD candidate shows about the nature of the scientific problem is evident both from his co-authored articles published in the AIP

Conference Proceed., Proceedings of the Bulgarian Academy of Sciences and in Proceedings of TU-Sofia and from the detailed survey, made by him in the Introduction to the dissertation. The precise mathematical formulations, to which the obtained solutions of the specific nonlinear partial differential equations are reduced, show a very good level of knowledge of the essence and details of the scientific problem. Particularly demonstrative of the high mathematical erudition of the PhD candidate is the proof of Theorem 3.3.1 (Chapter 3), which confirms the orbital stability of soliton waves for the nonlinear Schrödinger- Choquard equation under the specified parametric configurations given at the beginning of section 3.3. It follows from the theorem in question that the variational problem with a solution of the "ground state" type has minimizing functions that correspond to soliton waves with orbital stability.

Main tasks of the dissertation:

- Finding the optimal constant in the Gagliardo-Nirenberg interpolation inequality and computing it explicitly;
- Exploring the autonomous system to determine in a closed form a solution of the Choquard equation in the critical case of $p=5$;
- Confirming the hypothesis for the existence of a global solution of the nonlinear Schrödinger-Hartree equation in the 3-dimensional case and under the assumptions of exponential nonlinearity $p_2 = 7/3$ and $2 < p_1 < 8/3$;
- Proving the existence of a solution to the minimization problem of finding the minimum of the energy functional, corresponding to the Schrödinger-Hartree equation, under a certain requirements for the solution;
- Proving in the 3-dimensional case and under the specified assumptions of exponential nonlinearity that the soliton waves solving the Schrödinger-Hartree equation are orbitally stable
- Investigating the "ground state" type soliton solutions of the nonlinear Kline-Gordon-Hartree equation in the "n" -dimensional case for orbital instability, when the phase frequency ω is in the range $[0,1)$;
- Analysing the soliton waves for the nonlinear Klein-Gordon-Hartree equation and determining under which specific requirements for the phase frequency ω , these soliton waves are orbitally stable. Establishing a correlation between the orbital stability of these waves, with the stability of the soliton waves for the generalized Klein-Gordon-Hartree equation;
- Exploring the generalized Klein-Gordon-Hartree equation in the context of the strong instability by blow-up solution in the "n" dimensional case and when the exponential nonlinearity is $p \geq 2$.

Scientific contributions: Due to the relatively independent nature of the above main tasks in the dissertation, the scientific contributions that are the foundation in such monographs are distributed proportionally in the individual parts according to the chronology of goals and different mathematical

approaches used by the PhD candidate. Impressive scientific results have been achieved by the PhD candidate on the eight scientific tasks assigned above, namely:

In task 1 - the best constant in the Gagliardo-Nirenberg interpolation inequality has been computed explicitly by applying the Weinstein functional.

In task 2 - extending the approach for computing the best constant by exploring the autonomous system, a solution of the Choquard equation is obtained in a closed form in the critical case of $p = 5$.

In task 3 – the existence of a global solution of the nonlinear Schrödinger-Hartree equation has been proved in dimension 3 and under the assumption of specified exponential nonlinearity.

In task 4 – a variational approach and the profile decomposition theorem has been applied to prove that there exists a solution to the minimization problem of the energy functional, corresponding to the Schrödinger-Hartree equation.

In task 5 - the orbital stability of soliton waves, solving the nonlinear Schrödinger-Hartree equation, has been proved under the assumption that the specified exponential nonlinearities are fulfilled and the spatial dimension equals 3.

In task 6 – it has been proved that the ground state type solutions to the generalised Klein-Gordon-Hartree equation in \mathbb{R}^n are orbitally unstable when the phase frequency ω is in the domain $[0, 1)$.

In task 7 - for the generalized Klein-Gordon-Hartree equation, assuming orbital (in) stability in the classical sense and under specific requirements for the phase frequency ω , sufficient conditions are given for the orbital stability of the soliton solutions of this equation.

In task 8 - it has been proved that soliton waves, solving the above-mentioned nonlinear generalized equation, are strongly unstable by blow-up when the frequency obeys certain condition and the exponential nonlinearity is $p \geq 2$.

I believe that the scientific contributions of the PhD candidate Boyan Svetoslavov Kostadinov, demonstrated in his dissertation exceed the necessary scientific requirements for obtaining the educational and scientific degree "Doctor", both according to the Law for the development of academic staff in the Republic of Bulgaria and the Regulations for acquiring scientific degrees at the Technical University of Sofia.

Scope of personal contribution: The personal contribution of the PhD candidate in the development of the scientific tasks in the dissertation is emphasized by the five co-authored publications mentioned in the list of publications, as well as by the basic lemmas and theorems proved by him. It makes a very good impression that the candidate has put a lot of effort and work into the detailed proof of some key statements, such as Theorem 3.3.1, Theorem 6.4.1, and Theorem 6.4.2. etc., as well as related brief comments and physical interpretations.

Evaluation of the publications with the candidate's participation: As mentioned above, the PhD student Boyan Kostadinov has presented five publications, four of which were co-authored with Georgi

Venkov and Mirko Taruli, while the fifth article is independent, published in the Proceedings of Technical University of Sofia, vol. 69, Issue 3, 2019. The co-authored publications were published in the AIP Conference Proceedings in the period 2017 - 2019, and one is published in "*Proceeding of the Bulgarian Academy of Sciences*", Sci., 72, pp. 1177-1186, 2019. In the indicated publications is also the foundation of the dissertation and they meet the necessary requirements for them.

Conformity assessment of the Abstract of Dissertation: The Abstract of Dissertation "Exploring ground state properties of certain elliptic equations. Optimizing functions of Hartree-Sobolev-type interpolation inequalities" contains 30 pages and 32 references. It has a monolithic structure and the main goals and results of the dissertation are presented in an abbreviated form. The methods applied for the scientific analysis are described, as well as the arguments of their necessity.

I believe that Boyan Kostadinov's Abstract of Dissertation reflects truthfully the content and the achieved scientific results in the Dissertation. That is why I recommend its publication in the presented form.

Critical notes and recommendations:

I have some recommendations for the PhD candidate in connection with the dissertation formatting. The approved structure for the specified scientific description is related to subdivision by chapters with the respective title, and not by section numbering, which is usually applied to scientific publications or monographs with local content. This creates greater clarity about the variety of the author's scientific achievements. The introduction and concluding remarks are not numbered because they do not have the status of chapters from the dissertation. The concluding remarks marked by №7 should not be replaced by the list of scientific contributions. They should be a fragment of the author's overall attitude to the scientific potential of the dissertation, in view of his future research in this field. The same structural recommendations are also applied to the submitted Abstract of Dissertation.

I am surprised that at the end of the dissertation the author Boyan Kostadinov has failed to express the traditional attitude of a doctoral student to his scientific supervisor, in this case Prof. Dr. Georgi Venkov, for the help and assistance he has received from him. I don't think it's too late to be done!

Conclusion: Relying on the above analysis of scientific contributions in the dissertation, which has a high dissertation potential, I recommend the esteemed Scientific Jury to award Boyan Svetoslavov Kostadinov the educational and scientific degree "**Doctor**" in the professional field 4.5 Mathematics, doctoral program: "Mathematical modelling and application of mathematics".

25.08.2020

Sofia

Reviewer:

/Assoc. Prof. D.Sc. O. Kamenov/