



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

ФАКУЛТЕТ ПО ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

КАТЕДРА “МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ И ЧИСЛЕНИ МЕТОДИ”

Даниела Ангелова Георгиева

**Числено и аналитично изследване на някои
нелинейни задачи на физиката**

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация за присъждане на образователната и научна степен
“ДОКТОР”

Научно направление: 4.5 Математика

**Научна специалност: Математическо моделиране и приложение на
математиката**

Научни ръководители:

проф. д-р Михаил Тодоров

доц. д-р Любомир Ковачев

София, 2014г.



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

ФАКУЛТЕТ ПО ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

КАТЕДРА “МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ И ЧИСЛЕНИ МЕТОДИ”

Даниела Ангелова Георгиева

**Числено и аналитично изследване на някои
нелинейни задачи на физиката**

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация за присъждане на образователната и научна степен
“ДОКТОР”

Научно направление: 4.5 Математика

Научна специалност: Математическо моделиране и приложение на математиката

Научни ръководители:

проф. д-р Михаил Тодоров

доц. д-р Любомир Ковачев

Научно жури:

проф. д-р Михаил Тодоров, ТУ-София – становище

проф. д-р Яни Арnaudов, ТУ-София – становище

проф. д-мн Стефка Димова, ИМИ-БАН – рецензия

проф. д-р Снежана Гочева-Илиева, ПУ “Паисий Хилендарски” – становище

проф. д-рн Катя Вутова, ИЕ-БАН – рецензия

София 2014

Данни за дисертационния труд:

Дисертацията се състои от увод, 5 глави и заключение (авторска справка). Основният текст е написан на 119 страници, от които 29 фигури. Списъкът на цитираната литература съдържа 114 източника. В отделен списък са дадени работите, в които са публикувани основните резултати на дисертацията - 6 заглавия.

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на заседание на разширен състав на Катедрен съвет на кат. "Математически анализ и Числени методи" към ФПМИ при ТУ-София, състояло се на 04.06.2014 г.

Докторантката е главен асистент към същата катедра.

Изследванията от дисертационния труд са извършени във ФПМИ при ТУ-София, Института по електроника-БАН и кат. по Теоретична физика на ФзФ на СУ.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 10.10.2014 г. от 12.00 часа в зала 2140 на ТУ-София на открито заседание на Научното жури.

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в канцеларията на ФПМИ, блок 2, кабинет 2228–А. Рецензиите и становищата са публикувани на уебсайта на ТУ-София на страницата за добиване на научни степени.

Автор: гл. ас. Даниела Ангелова Георгиева

Заглавие: Числено и аналитично изследване на някои нелинейни задачи на физиката

Тираж: 40 броя

Печатна база при ТУ-София

Актуалност на темата

Съвременната физика поставя за решаване математични задачи, свързани с аналитичното и числено моделиране на начални и гранични задачи за нелинейни обикновени и частни диференциални уравнения (НОДУ и НЧДУ). В частност, такива задачи възникват в областите на гравитацията, астрофизиката и разпространението на свръх-къси оптични импулси.

Изследването на компактни обекти като черните дупки в теорията на гравитацията, куплирани с допълнителна нелинейна електродинамика, поставя интересни и предизвикателни задачи както от физична, така и от математична гледна точка. Изучаването на черни дупки е една от най-атрактивно развиваните области на съвременната теоретична физика. Нелинейна електродинамика е въведена и разгледана за пръв път през 1934 г. от Борн и Инфелд [1] в опита им да модифицират класическата електродинамика на Максвел, с цел да решат проблема с безкрайната собствена енергия на електрона, както и да получат модел на електрона с крайно разпределение на плътността на енергията. Понастоящем интересът към нелинейната електродинамика на Борн–Инфелд е продиктуван главно от нейната роля при описания на поведението на струнната динамика при „ниски” енергии в непертурбативен режим, по-точно при описанието на т.н. D-брани (Дирихле-мембрани) [2]-[5]. Обобщените нелинейни електродинамични теории са мощно средство за построяване на нов тип решения в общата теория на относителността, описващи черни дупки без точкови сингулярности на метриката.

От математична гледна точка прилагането на Лагранжевия формализъм в общия случай води до тензорна система от НЧДУ на Айнщайн, която е много трудна за решаване. В случая, когато редуцираме разглежданията до статична, сферично-симетрична метрика на пространство-времето, системата на Айнщайн може се сведе до мултипараметрична свързана система от НОДУ. Стандартно тази система НОДУ може да се решава като начална задача, като се прилагат методи на Рунге-Кута, на престрелката и т.н. Поради факта, че радиусът на хоризонта на събитията е априори неизвестна величина, така поставената задача може да се разглежда и като задача на Стефан [6], т.е. като задача със свободна граница. Задачи на Стефан възникват и в други области на физиката – механика на флуидите, топлопроводността, дифузията и т.н. В теория на гравитацията и астрофизиката задачи със свободни граници възникват също така при моделирането на различни типове звезди [7]-[11].

Ефективни методи за числено решаване на едномерни нелинейни задачи са непрекъснатите аналози на итерационните методи. В частност, Непрекъснатият Аналог на Метода на Нютон (НАМН) е разработен и многократно подобряван в [12]-[16] при изследването и компютърното моделиране на сложни физични процеси и системи. Той може дори да се приложи и при решаването на задачи със собствени стойности и подвижни граници. В рамките на теория на гравитацията такъв подход е приложен за пръв път в при изследването на неутронни, бозонни и смесени бозонно-фермионни звезди [7]-[11].

В [17] са получени решения, описващи статични, сферично-симетрични, магнитно-заредени черни дупки с нелинейна електродинамика на Борн-Инфелд и нетривиално **безмасово скаларно поле** в рамките на скаларно-тензорните теории на гравитацията (СТТ). Тяхната причинна структура наподобява тази на известното, станало вече класическо, решение на Шварцшилд – те имат единствен хоризонт на събитията.

Една от основните цели на настоящата дисертация е чрез прилагането на подходящ числен метод да се изследват решения, описващи статични, сферично-симетрични, магнитно-заредени и асимптотично плоски черни дупки с нелинейна електродинамика на Борн-Инфелд в

случая на **масивно скаларно поле**. Добавянето на потенциал за скаларното поле води до по-богата, но и по-трудна за изследване структура и феноменология на черната дупка. В този случай могат да се появят решения с вътрешни хоризонти или решения с изроден хоризонт на събитията.

Нелинейната електродинамика на вакуума, по моделите на Борн–Инфелд и Ойлер–Хайзенберг, изисква свръх-силни електромагнитни полета с интензитет от порядъка на $I \approx 10^{26} \text{ W/cm}^2$. В настоящата дисертация ще покажем, че двата модела са еквивалентни за три-компонентни векторни полета. Съвременните лазерни системи могат да генерират полета с интензитет от порядъка на $I \approx 10^{22} \text{ W/cm}^2$ и по тази причина ефекти, свързани с нелинейна поляризация във вакуум не са наблюдавани. Началото на нелинейната оптика на газове и диелектрици е положено през 1961 г. с експерименталното наблюдение на генерация на втора хармонична от Франкен [18]. Основите на тази теория на квантово-механично ниво са изградени една година по-късно от Бломберген [19]. За наблюдаването на нелинейните ефекти в газове и диелектрици се изискват значително по-ниски интензитети на електромагнитното поле. За въздух те са от порядъка $I \approx 10^{12} \text{ W/cm}^2$, които са достижими за съвременните лазерни установки, генериращи свръх-къси (фемто- и атосекундни) импулси. Това позволява наблюдаването на нови експериментални ефекти като филаментация [20], кохерентно GHz/THz излъчване [21] и други. Тези нови ефекти изискват задълбочено изследване, на което е посветена втората част на дисертационния труд.

Теоретичното описание на посочените по-горе нелинейни явления се базира на аналитично и числено изследване на нелинейни частни диференциални уравнения (НЧДУ). За повечето от тези многомерни нелинейни уравнения съществуват краен брой интегрални инварианти (законали за запазване) и за тях са намерени частни солитонни решения или решения във вид на дишащи решения (бризери) и ударни вълни [22]. Съществуват два основни метода за числено моделиране на този тип задачи. Първият е свързан с използването на различни схеми на дискретизация и прогонки на мрежово решение (алгоритъм на Томас), докато вторият, т.н. Метод на разделяне по физични фактори (МРФФ) или псевдоспектрален метод, решава последователно линейната част на НЧДУ и след това нелинейната част [23]. Предимството на МРФФ е, че той е до два порядъка по-бърз от диференчните методи благодарение на използването на алгоритъма на бързото преобразование на Фурие (БПФ) (виж например [23] и цитираната литература там).

Основен метод за изследване на динамиката на светлинни импулси е методът на бавно-изменящите се амплитуди [24]. Появата на един или друг нелинеен процес силно зависи от това, колко мощността на светлинните импулси е над критичната за самофокусировка P_{cr} , и води до включване или изключване на различни физични механизми в описанието на динамиката на разпространение. Всички тези процеси могат да се изследват с числено моделиране на нелинейни амплитудни уравнения, описващи еволюцията на обвиващата на локализираната около дадена носеща честота вълна.

Предвид казаното дотук, **една от основните цели** на настоящата дисертация е аналитично и числено моделиране на еволюцията на свръх-къси лазерни импулси и сравнение на получените резултати с реални експериментални данни и измервания.

Проведеният дотук критичен анализ и обзор на получените резултати в споменатите направления дефинират следните

Основни цели на изследванията в дисертационния труд

1. Числено изследване на свойствата, причинната структура и устойчивостта на черни дупки с магнитен заряд, куплирани с нелинейна електродинамика на Борн-Инфелд и масивно скаларно поле в рамките на скаларно-тензорните теории на гравитацията и със статична, сферично-симетрична метрика на пространство-времето.
2. Намиране на точни аналитични решения с крайна енергия на линейното вълново уравнение.
3. Редукция на нелинейната поляризация на вакуума по Ойлер-Хайзенберг до нелинейна поляризация от тип Борн-Инфелд. Намиране на точни аналитични решения с крайна енергия на нелинейното вълново уравнение във вакуум.
4. Изследване на нелинейното взаимодействие на фемтосекундни лазерни импулси на една и съща носеща честота, разпространяващи се във въздух. Разработване на теоретичен модел на базата на векторно обобщение на амплитудното уравнение с включване на изродените четири-фотонни процеси.

Структура на дисертацията

Дисертацията се състои от увод, пет глави и заключение. Първите две глави имат обзорен характер, а останалите три глави съдържат оригинални резултати.

В Глава 1 са разгледани по-подробно квантово-механичните електрично-диполни преходи в атоми и молекули с цел по-пълно разбиране на оптичните процеси със стационарен и нестационарен отклик на средата. Представен е изводът и нормирането в различни координатни системи на нелинейното амплитудно уравнение до втори ред на дисперсията, с помощта на което са получени част от резултатите в Глава 4 и което е в основата на изследвания математичен модел в Глава 5. Направен е обзор на анализа, проведен в [25]-[27], за границите на приложимост на параксиалната оптика.

В Глава 2 са обяснени основните идеи на числените методи и алгоритми, използвани в изследванията, проведени в дисертацията.

Глава 3 е посветена на изследване на числените решения, описващи черни дупки с магнитен заряд, куплирани с нелинейна електродинамика на Борн-Инфелд, в рамките на скаларно-тензорните теории на гравитацията (СТТ).

В Глава 4 са получени точни решения на линейното вълново уравнение, както и на нелинейното вълново уравнение, описващо разпространението на лазерни импулси в нелинеен вакуум.

В Глава 5 е разгледано взаимодействието на оптични импулси на една и съща носеща честота посредством изроденото четири-фотонно вълново смесване.

В заключението са представени основните приноси и резултати, постигнати в дисертационния труд.

Апробация на дисертацията

Основните резултати от дисертацията са докладвани на следните семинари и конференции:

1. Годишна сесия на българската секция на *SIAM* – 2008.

2. Международна конференция “Applications of Mathematics in Technical and Natural Sciences”, Св. Св. Константин и Елена – 2012.
3. Международна конференция “Geometry, Integrability and Quantization”, Св. Св. Константин и Елена – 2012.
4. Годишен семинар на Института по Електроника, БАН – 2012.
5. Международна конференция “Applications of Mathematics in Technical and Natural Sciences”, Албена – 2013.
6. Годишен семинар на Института по Електроника, БАН – 2013.

Части от дисертацията са разработени с подкрепата на договор ДДВУ02/71 на Фонд „Научни изследвания” при МОМН, както и на докторантски договор № 141ПД0001–11 при НИС, ТУ–София.

Съдържание на дисертацията

Увод

Разгледани са основните тенденции в развитието на изследваните в дисертацията тематички и е направен обстоен обзор и анализ на предходни изследвания. Поставени са основните цели на изследванията в дисертационния труд.

Глава 1. Основи на оптично-диполните преходи и базови уравнения в нелинейната оптика. Предварителни сведения

Разгледани са по-подробно квантово-механичните електрично-диполни преходи в атоми и молекули с цел по-пълно разбиране на оптичните процеси със стационарен и нестационарен отклик на средата. Показано е как от нестационарната теория на електро-диполното приближение се получават дисперсионни ефекти от различен ред и възможността да се получат нелинейните оптични възприемчивости. Представен е изводът и нормирането в различни координатни системи на нелинейното амплитудно уравнение до втори ред на дисперсията, с помощта на което са получени част от резултатите в Глава 4 и което е в основата на изследвания математичен модел в Глава 5. Направен е обзор на анализа, проведен в [25]-[27], за границите на приложимост на параксиалната оптика. Основният извод е, че параксиалната оптика описва коректно еволюцията на оптични импулси с тесен спектър. Динамиката на импулси с широк спектър може да се опише коректно в рамките на непараксиалното амплитудно уравнение, отчитащо втория ред на дисперсията.

Глава 2. Кратък обзор на числените методи, използвани в дисертацията

Обяснени са основните идеи на числените методи и алгоритми, използвани в изследванията, проведени в дисертацията. В § 2.1. е изложен накратко Непрекъснатият аналог на метода на Нютон [12]-[16]. В § 2.2 е представен Методът на разделяне по физични фактори [23].

Глава 3. Числено изследване на заредени черни дупки в скаларно-тензорните теории на гравитацията с масивно скаларно поле

Разглеждаме случая на магнитно заредени, статични, сферично-симетрични и асимптотично плоски черни дупки с нетривиално безмасово скаларно поле и нелинейна електродинамика на Борн-Инфелд в рамките на СТТ.

§ 3.1. Формулировка на задачата

Ще изследваме търсените решения в конформно свързаната координатна система на Айнщайн [20]- [30], в която интегралът на действието има вида

$$S = \frac{1}{16\pi G_*} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R - 2g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - 4V(\varphi) \right] + S_m \left[\Psi_m; A^2(\varphi) g_{\mu\nu} \right], \quad (3.1)$$

където G_* е гравитационната константа, R е скаларната кривина на Ричи относно метриката на Айнщайн $g_{\mu\nu}$, и S_m е действието на материалните полета. Функцията $A(\varphi)$ в материалната част на действието определя сдвояването между скаларното поле φ и материалните полета, в частност електромагнитното поле. Функцията $V(\varphi)$ е потенциалът на скаларното поле. Типът на СТГ се определя от конкретната форма на функциите $A(\varphi)$ и $V(\varphi)$. Действието S_m на нелинейната електродинамика има вида

$$S_m = \frac{1}{4\pi G_*} \int d^4x \sqrt{-g} A^4(\varphi) L(X, Y), \quad (3.2)$$

$$\text{където } X = \frac{A^{-4}(\varphi)}{4} F_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}, \quad Y = \frac{A^{-4}(\varphi)}{4} F_{\mu\nu} (*F)^{\mu\nu}. \quad (3.3)$$

Тук с “*” е означен дуалният тензор по Ходж спрямо метриката $g_{\mu\nu}$. Действието (3.1) с нелинейната електродинамика (3.2) води до следните полеви уравнения

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= 2\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + 2V(\varphi) g_{\mu\nu} - 2\partial_X L(X, Y) \left(F_{\mu\beta} F_\nu^\beta - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \\ &\quad - 2A^4(\varphi) [L(X, Y) - Y \partial_Y L(X, Y)] g_{\mu\nu}, \\ \nabla_\mu \left[\partial_X L(X, Y) F^{\mu\nu} + \partial_Y L(X, Y) (*F)^{\mu\nu} \right] &= 0, \\ \nabla_\mu \nabla_\nu \varphi &= \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} - 4\alpha(\varphi) A^4(\varphi) [L(X, Y) - X \partial_X L(X, Y) - Y \partial_Y L(X, Y)], \end{aligned} \quad (3.4)$$

където $\alpha(\varphi) = \frac{d \ln A(\varphi)}{d\varphi}$. Ние ще разглеждаме чисто магнитния случай ($Y=0$), в който

електродинамиката на Борн-Инфелд в първо приближение се описва от Лагранжиана $L_{BI} = 2b \left(1 - \sqrt{1 + \frac{X}{b}} \right)$. Параметърът b обикновено се нарича параметър на Борн-Инфелд. В

граничния случай когато $b \rightarrow \infty$, Лагранжианът на Борн-Инфелд възстановява класическата електродинамика на Максвел. Ще ограничим нашите изследвания, като разглеждаме

потенциали $V(\varphi)$, удовлетворяващи условията $\varphi \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} \geq 0$ и $\left. \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = 0$. В частност, нашите

изследвания са проведени с потенциал на скаларното поле φ във вида $V(\varphi) = \frac{1}{2} m_*^2 \varphi^2$, където

m_* е масата на скаларното поле. Ще търсим решения с регулярно скаларно поле φ върху хоризонта на събитията. Ще изискваме $0 < A(\varphi) < \infty$ за $r \geq r_H$, където r_H е радиусът на

хоризонта на събитията. Тук ще разглеждаме теории за които $\alpha(\varphi)$ има фиксиран положителен знак за всички стойности на φ (подходът на изследване на решения в рамките на теории, за

които $\alpha(\varphi) < 0$, е подобен). Ще ограничим нашите изследвания върху теорията на Бранс-Дике, в която куплиращата функция има вида $A(\varphi) = e^{\alpha\varphi}$, където $\alpha(\varphi) = \text{const} > 0$.

§ 3.2. Базисни уравнения

В настоящата глава изследваме статични, сферично-симетрични, асимптотично плоски черни дупки. Метриката в статично, сферично-симетрично пространство-време има вида

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -f(r)e^{-2\delta(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.5)$$

където $f(r) = 1 - \frac{2m(r)}{r}$, а $m(r)$ е локалната гравитационна маса (тя е различна от масата на скаларното поле m_*). Виждаме, че регулярната метрика (3.5) има изолирана особеност там, където $f(r) = 0$.

ДЕФИНИЦИЯ Положителните нули на метричната функция $f(r)$ се наричат хоризонти на черната дупка, а най-голямата от тях - хоризонт на събитията. Ще означим радиуса на хоризонта на събитията с r_H .

Наличието на масивно скаларно поле предполага наличието на вътрешни хоризонти и екстремални решения, т.е. решения, за които са изпълнени едновременно условията: $f(r_H) = f'(r_H) = 0$. В този случай казваме, че хоризонтът на събитията е изроден.

Тук разглеждаме черни дупки с магнитен заряд. Силата на електромагнитното поле се определя по формулата $F = P \sin\theta d\theta \wedge d\varphi$, където с P е големината на магнитния заряд. Полевите уравнения (3.4) се свеждат до следната свързана система ОДУ

$$\frac{d\delta}{dr} = -r \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2, \quad (3.6)$$

$$\frac{dm}{dr} = r^2 \left[\frac{1}{2} f \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 + V(\varphi) - A^4(\varphi) L(X) \right], \quad (3.7)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 f \frac{d\varphi}{dr} \right) = r^2 \left[\frac{dV}{d\varphi} - 4\alpha(\varphi) A^4(\varphi) [L - X \partial_X L(X)] - r f \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^3 \right], \quad (3.8)$$

където X се редуцира до $X = \frac{A^{-4}(\varphi) P^2}{2 r^4}$.

§ 3.3. Предварителни сведения за свойствата на решенията

3.3.1. Свойства на метричните функции и скаларното поле

1) Скаларното поле $\varphi(r)$ не може да бъде положително върху хоризонта на събитията. 2) Скаларното поле $\varphi(r)$ е отрицателно и няма нули във външната област. 3) Метричната функция $f(r)$ не може да има екстремум, по-голям от единица. 4) Метричната функция $\delta(r)$ е гладка намаляваща функция и има инфлексни точки, там където $\varphi(r)$ има екстремуми.

3.3.2 Асимптотично поведение на решенията

При $r \rightarrow \infty$ имаме следните асимптотични разложения за полевите функции

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{P^2}{r^2} + \frac{P^4}{40br^6} + O(r^{-14}), \quad \delta(r) = O(r^{-16}), \quad \varphi(r) = -\frac{\alpha(0)P^4}{4m_*^2 br^8} + O(r^{-9}).$$

Тези асимптотики се използват като начални условия при численото интегриране.

3.3.3. Мерни единици

В този раздел е посочен начинът на обезразмеряване на системата (3.6)-(3.8)

3.3.4. Екстремални решения

Черните дупки с масивно скаларно поле имат по-богата причинна структура в сравнение с тези с безмасово скаларно поле, тъй като в първия случай се допуска наличието на вътрешен хоризонт и изроден хоризонт на събитията (екстремално решение). Изследвайки уравнения (3.6)-(3.8), стигаме до извода, че за фиксирани стойности на α и m_* съществува критична стойност на магнитния заряд P_{crit} . Решения с изроден хоризонт на събитията съществуват само за $P > P_{crit}$. Изроден хоризонт на събитията обикновено се формира, когато за някои стойности на масата M на черната дупка два регулярни хоризонта се сливат. Следователно, можем да очакваме, че при $P > P_{crit}$ съществуват черни дупки с два регулярни хоризонта за някои стойности на M . В случая $P < P_{crit}$ не бихме могли да очакваме съществуването на решения с повече от един хоризонт. Численият анализ, проведен в § 3.5, потвърждава очакванията за случая $P > P_{crit}$. Ще отбележим, че за фиксирано $P > P_{crit}$ с намаляването на масата M се достига екстремална черна дупка, докато за $P < P_{crit}$ – гола сингулярност.

§ 3.4. Числен метод

Разделяме задачата на две подзадачи – във външната област (отдясно на хоризонта на събитията r_H) и във вътрешната област (отляво на r_H) на черната дупка.

3.4.1. Външна задача

Първо разглеждаме задачата във външната област. За тази област можем да формулираме коректна гранична задача за системата ОДЕ (3.6)–(3.8) с гранични условия

$$f(r_H) = 0, \tag{3.9}$$

върху хоризонта на събитията r_H и асимптотични условия

$$\lim_{r \rightarrow \infty} m(r) = M, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \delta(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = 0. \tag{3.10}$$

С M означаваме асимптотичната маса на черната дупка в координатната система на Айнщайн, за която предполагаем, че е известна.

Задачата във външната област е със свободна лява граница. Освен неизвестните функции $\delta(r)$, $m(r)$ и $f(r)$ полевите уравнения съдържат и един неизвестен параметър – хоризонта на събитията r_H . Тъй като r_H е априори неизвестна величина, за удобство въвеждаме нова пространствена променлива $x = r - r_H$. Като резултат интервалът $r \geq r_H$ се трансформира в интервал със фиксирана лява граница относно новата променлива x , т.е. $x \geq 0$. Прилагането на тази смяна на променливата води и до появата на хоризонта на събитията r_H в

явна форма в полевите уравнения. Както ще покажем по-долу, това позволява така формулираната гранична задача да бъде разглеждана като обобщена нелинейна задача със спектрален параметър r_H . За еднозначно определяне на r_H се използва т.н. условие за регуляризация

$$\left(\frac{df}{dr} \frac{d\varphi}{dr} \right) \Big|_{r=r_H} = \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} \Big|_{r=r_H} + \left\{ 4\alpha(\varphi)A^4(\varphi)[X\partial_x L(X) - L(X)] \right\} \Big|_{r=r_H}, \quad (3.11)$$

което гарантира регулярността и еднозначността на търсените функции в околност на хоризонта на събитията. Търсените решения са собствени функции, съответстващи на спектралния параметър r_H . Нека функцията $\Phi(x) \equiv \varphi'(x)$. Тогава системата ОДУ (3.6)-(3.9) с гранични условия (3.9)-(3.10) може да се запише като еквивалентно нелинейно параметрично функционално уравнение спрямо променливата x

$$F(y, y', r_H) = 0, \quad (3.12)$$

където $F(y, y', r_H) = (F_1, F_2, \dots, F_8)^T$, $y(x) = [\delta(x), m(x), \varphi(x), \Phi(x)]$. Тук

$$F_1 \equiv \frac{d\delta}{dx} + (x+r_H)\Phi^2, \quad F_2 \equiv \frac{dm}{dx} - (x+r_H)^2 \left[\frac{1}{2} f\Phi^2 + V(\varphi) - A^4(\varphi)L(X) \right], \quad F_3 \equiv \frac{d\varphi}{dx} - \Phi,$$

$$F_4 \equiv \frac{d}{dx} \left((x+r_H)^2 f\Phi \right) - (x+r_H)^2 \left[\frac{dV}{d\varphi} - 4\alpha(\varphi)A^4(\varphi)[L - X\partial_x L(X)] - (x+r_H)f\Phi^3 \right] = 0,$$

$$F_5 \equiv m(0) - \frac{r_H}{2}, \quad F_6 \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} \delta(r), \quad F_7 \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} m(r) - M \quad \text{и} \quad F_8 \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r).$$

Предполагаме, че съществува изолирано решение $\{y^*, r_H^*\}$ на функционалното уравнение (3.12). Следвайки идеята на НАМН въвеждаме “времеподобен” параметър (итеративно време, Гавуринско време) $t \in [0, \infty)$ [12], предполагайки, че търсеното решение е функция и на времевия параметър t , т.е. $y = y(x, t)$, $r_H = r_H(t)$. Тогава, прилагайки НАМН, получаваме нелинейното уравнение на Гавурин

$$\dot{F} \equiv \frac{\partial F}{\partial y'} z' + \frac{\partial F}{\partial y} z + \frac{\partial F}{\partial r_H} \rho = -F, \quad (3.13)$$

където $z' = \dot{y}'$, $z = \dot{y}$, $\rho = \dot{r}_H$, а с $\frac{\partial F}{\partial(\cdot)}$ сме означили производните на Фреше в точката (y, y', r_H) .

Представяме търсената $4D$ векторна функция $z(x)$ като линейна функция на нарастването ρ и нови неизвестни $4D$ векторни функции: $z = u + \rho v$ [13,15,16]. Полагайки субституцията $z = u + \rho v$ към уравнението на Гавурин (3.13) получаваме две линейни системи ОДУ от първи ред за вектор-функциите $u(x)$ и $v(x)$. Явната формула за нарастването ρ се получава след прилагането на НАМН към условието за регулярност (3.11).

Нека $\{y^0, r_H^0\}$ е начално приближение, достатъчно близко до търсеното точно решение $\{y^*, r_H^*\}$. Тогава на всяка итерация следващото приближение на точното решение $\{y^*, r_H^*\}$ се пресмята по схемата на Ойлер $y^{k+1} = y^k + \tau_k (u^k + \rho_k v^k)$, $r_H^{k+1} = r_H^k + \tau_k \rho_k$ за $k = 0, 1, 2, \dots$, и избор на “оптималната” стъпка τ_k по формулата на Ермаков-Калиткин [14] $\tau_{opt}^k = \frac{d(0)}{d(0) + d(1)}$,

където $d(\tau_k) = \max \left[d_F, (r_H^k + \tau_k \rho_k)^2 \right]$ и d_F е Евклидовата норма на векторната функция F . Може да се докаже, че сходимостта на итерационния процес при НАМН е квадратична. За решаване на граничните задачи за векторните функции $u(x)$ и $v(x)$ на всяка итерационна стъпка се използва схемата на колокациите. Понеже системата е от първи ред, то търсените решения $u(x)$ и $v(x)$ се приближават с квадратични Лагранжеви елементи. За точки на колокациите избираме Гаусовите възли на мрежата, като по този начин се достига четвърти ред на апроксимация [31].

3.4.2. Вътрешна задача

Външното решение може да бъде продължено наляво от хоризонта на събитията, (във вътрешната област) с начални стойности търсените функции и техните производни върху хоризонта на събитията r_H , получени вече чрез решаване на външната гранична задача. От формална гледна точка това означава да поставим начална задача за вътрешната област $r < r_H$. Проблемът е, че хоризонтът на събитията е сингулярна точка за уравнението (3.22) за скаларното поле φ . Коефициентът $r^2 f$ пред водещата производна φ'' върху r_H е равен на нула – тъй като $f(r_H) = 0$. С цел да формулираме коректна регулярна задача на Коши и при предположение за гладкост на функциите поставяме началното условие в точка $r_H - \varepsilon$ вместо в r_H , където $\varepsilon > 0$ е достатъчно малко число. От предположението за гладкост в интервала $(r_H - \varepsilon, r_H)$ следва, че разглежданите функции могат да бъдат развити в ред на Тейлор в околност на r_H

$$\begin{aligned} \delta(r_H - \varepsilon) &\approx \delta(r_H) - \delta'(r_H)\varepsilon + o(\varepsilon^2), \quad m(r_H - \varepsilon) \approx m(r_H) - m'(r_H)\varepsilon + o(\varepsilon^2), \\ \varphi(r_H - \varepsilon) &\approx \varphi(r_H) - \varphi'(r_H)\varepsilon + o(\varepsilon^2) \quad \Phi(r_H - \varepsilon) \approx \Phi(r_H) - \Phi'(r_H)\varepsilon + o(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

където $\Phi(r) \equiv \varphi'(r)$. Такова изместване се прави при всеки вътрешен хоризонт (ако такъв бъде достигнат). За решаване на вътрешната задача отново използваме НАМН.

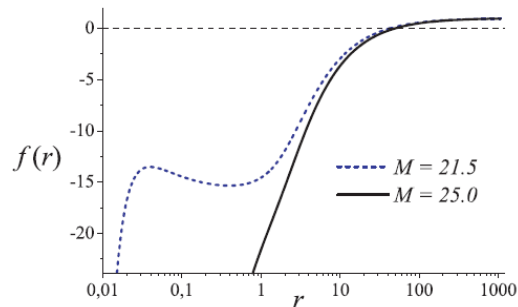
§ 3.5. Числени резултати

Числените изследвания са проведени при предположение, че $P > P_{crit}$. Численият анализ на решенията показва, че за фиксирани стойности на α и m_* , структурата на решенията зависи от отношението на заряда и масата на черната дупка P/M . Когато P/M е достатъчно малко ($P/M < 1$), получените решения имат единствен неизроден хоризонт – хоризонта на събитията. За достатъчно големи стойности на P/M , ($P/M \approx 1$), черните дупки имат вече два хоризонта или един изроден хоризонт (екстремално решение).

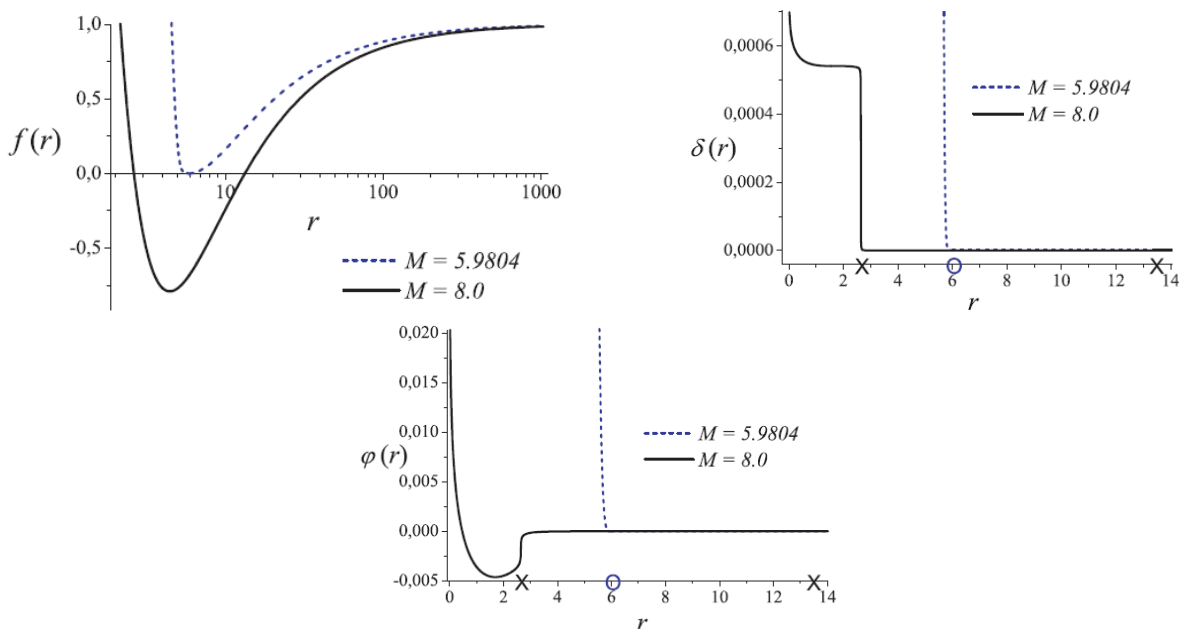
На Фиг. 3.1 е представена метричната функция $f(r)$ с единствен хоризонт за $\alpha = 0.01$, $m_*^2 = 0.8$, $P = 6.0$ и две различни стойности на масата на черната дупка $M = 21.5$ и $M = 25.0$. Както може да се види на Фиг. 3.1 (абсцисата е в логаритмичен мащаб), функцията $f(r)$, получена за $M = 21.5$ има отрицателен максимум.

Решения с два регулярни хоризонта и един изроден хоризонт са представени на Фиг. 3.2 за стойности на параметрите $\alpha = 0.01$, $m_*^2 = 0.8$, $P = 6.0$ и маса на черната дупка $M = 5.9804$ за екстремалното решение и $M = 8.0$ за решението с два хоризонта. Наблюдаваме, че в

съответствие с наблюденията от § 3.3, $\delta(r)$ има инфлексна точка в точката на екстремум на $\varphi(r)$. Радиусът на изродения хоризонт на събитията на екстремалната черна дупка е означен с “○”, докато двата радиуса на хоризонтите на решението за $M = 8.0$ са означени с “×”.



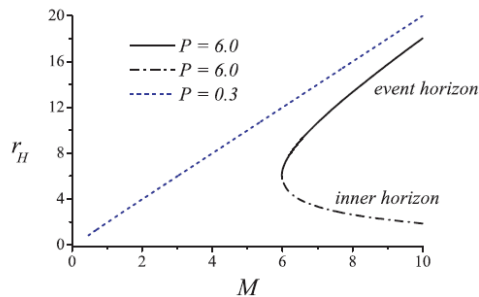
Фиг. 3.1. Метричната функция $f(r)$ за $\alpha = 0.01$, $m_*^2 = 0.8$, $P = 6.0$ и две различни стойности на масата на черната дупка $M = 21.5$ и $M = 25.0$. Абсцисата е в логаритмичен мащаб.



Фиг. 3.2. Метричните функции $f(r)$, $\delta(r)$ и скаларното поле $\varphi(r)$ за $\alpha = 0.01$, $m_*^2 = 0.8$, $P = 6.0$ и две различни стойности на масата на черната дупка $M = 5.9804$ и $M = 8.0$. Абсцисата на графиката на $f(r)$ е в логаритмичен мащаб.

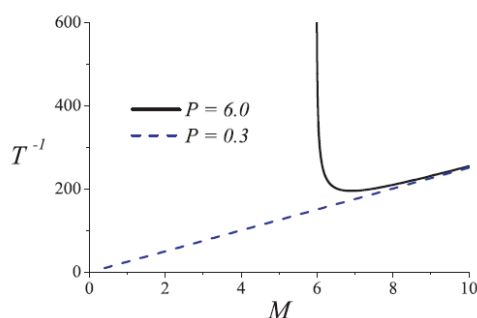
На Фиг. 3.3 е показана $M - r_H$ диаграмата $\alpha = 0.01$ и $m_*^2 = 0.8$. За тези стойности на параметрите $P_{crit} \approx 0.38$. Представени са две графики – за $P = 6.0 > P_{crit}$ и $P = 0.3 < P_{crit}$. В първия случай за маси в интервала $M \in [5.9804, 21.1]$ черните дупки имат два регулярни хоризонта, които постепенно се сливат и за маса $M = 5.9804$ се получава екстремално решение, когато $P/M \approx 1$. Стойността на хоризонта на събитията, получена чрез численото интегриране на системата ОДУ (3.6)-(3.8) съвпада с тази, получена от теоретичните изследвания, проведени в § 3.3 на дисертацията, в рамките на грешките на апроксимация и закръгляне, което е добър тест за коректността на получените числени резултати. Във втория

случай, $P = 0.3 < P_{crit}$, черните дупки имат един неизроден хоризонт, като се достига до гола сингулярност.



Фиг. 3.3. Радиусите на хоризонтите на черната дупка като функция на масата M . При $P = 6.0$ черната дупка има два хоризонта – хоризонта на събитията и вътрешен хоризонт. При $P = 0.3$ черната дупка има единствен хоризонт – хоризонта на събитията.

Информация относно устойчивостта на числените решения може да се получи чрез прилагане метода на “точката на обръщане” [32]-[36]. Съгласно този метод, промяната на устойчивостта на решенията се проявява като бифуркационна точка (точка, в която има разклоняване на равновесни последователности) или като точка на обръщане (точка, в която две равновесни последователности се сливат с вертикална допирателна) върху $M - T^{-1}$ -диаграмата. Отсъствието на такива точки върху $M - T^{-1}$ -диаграмата означава, че ако поне една точка от равновесната последователност е устойчива, то тогава цялата равновесна последователност е устойчива. На Фиг. 3.4 е представена $M - T^{-1}$ -диаграмата на изследваните решения за $P = 6.0 > P_{crit}$ и $P = 0.3 < P_{crit}$, където с T сме означили температурата на черната дупка върху хоризонта на събитията. И в двата случая, когато стойностите на масата M на черната дупка са големи, е изпълнено, че $T^{-1} \approx M$, т.е. решенията се приближават до решението на Шварцшилд, устойчивостта на което вече е показана в рамките на теорията на Бранс-Дике [37]. Следователно, ние очакваме, че за големи M черните дупки с масивно скаларно поле също ще бъдат устойчиви. Тъй като и в двата показани случая не се наблюдават бифуркационни точки или точки на обръщане, ние можем да очакваме, че всички равновесни клонове са устойчиви. При $P = 6.0 > P_{crit}$ с намаляване на масата M , реципрочната температура T^{-1} расте неограничено, тъй като се достига екстремално решение. При $P = 0.3 < P_{crit}$ се достига гола сингулярност и T^{-1} клони към нула.



Фиг. 3.4. Зависимостта на T^{-1} от масата M при $P = 6.0$ и $P = 0.3$.

§ 3.6. Устойчивост на решенията относно сферично-симетрични пертурбации

Следвайки схемата, представена детайлно в [39], получаваме следното уравнение за пространствената част $\psi(r)$ на пертурбацията на скаларното поле $\phi(r)$

$$f(r)e^{-\delta(r)} \frac{d}{dr} \left[f(r)e^{-\delta(r)} \frac{d\psi}{dr} \right] + \frac{2}{r} f^2(r)e^{-2\delta(r)} \frac{d\psi}{dr} + \omega^2 \psi = f(r)e^{-2\delta(r)} U(r) \psi, \quad (3.14)$$

където ω^2 играе ролята на спектрален параметър и

$$U(r) = -2 \left\{ 1 - 2r^2 [V(\phi) - A^4(\phi)L(X)] \right\} [\partial_r \phi(r)]^2 + 4r [\partial_r \phi(r)] \frac{dV}{d\phi} + \frac{d^2 V}{d\phi^2} \\ + A^4(\phi) [16r \partial_r \phi(r) \alpha(\phi) + 4 \partial_\phi \alpha(\phi)] [X \partial_X L(X) - L(X)] \\ - 16\alpha^2(\phi) A^4(\phi) [X^2 \partial_X^2 L(X) - X \partial_X L(X) + L(X)].$$

Уравнение (3.14) може да бъде приведено във формата на уравнението на Шрьодингер. Това може да се постигне, като използваме радиалната координата на костенурката и подходяща субституция за ψ : $dr_* = \frac{dr}{f(r)e^{-\delta(r)}}$, $\psi(r) = \frac{u(r)}{r}$. Получаваме следното уравнение от тип

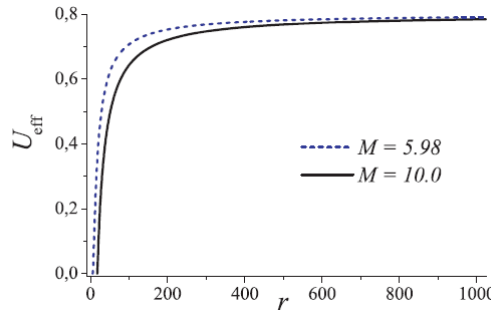
Шрьодингер

$$\frac{d^2 u(r_*)}{dr_*^2} + \omega^2 u(r_*) = U_{eff}(r_*) u(r_*).$$

Ефективният потенциал е

$$U_{eff}(r_*) = f(r_*) e^{-2\delta(r_*)} \left\{ U(r_*) - 2V(\phi) + 2A^4(\phi)L(X) + \frac{1}{r_*^2} [1 - f(r_*)] \right\}.$$

За $r \in [r_H, \infty)$, където r_H е радиуса на хоризонта на събитията, радиалната координата на костенурката $r_* \in (-\infty, \infty)$. Следователно ние можем да използваме техниките от стандартната квантова механика, за да изследваме свойствата на малките пертурбации.



Фиг. 3.5. Ефективният потенциал U_{eff} за $\alpha = 0.01$, $m_*^2 = 0.8$, $P = 6.0$ и две стойности на масата M на черната дупка $M = 5.98$ – екстремално решение и $M = 10.0$ – с регулярен хоризонт на събитията.

В пространството от параметри, в което се провежда численият анализ, ефективният потенциал U_{eff} е неотрицателен. Това означава, че изследваните черни дупки са устойчиви относно сферично-симетрични пертурбации. На Фиг. 3.5 са показани графиките на U_{eff} за $\alpha = 0.01$, $m_*^2 = 0.8$, $P = 6.0$ и за $M = 5.98$ и $M = 10.0$. Първият случай съответства на

екстремално решение, а вторият – на черна дупка с регулярен хоризонт на събитията. На тази фигура ефективния потенциал U_{eff} е представен в термините на радиалната координата r . В термините на координатата на костенурката r_* ефективният потенциал U_{eff} би бил неотрицателен.

Глава 4. Точни решения с крайна енергия на линейното вълново уравнение и на нелинейното вълново уравнение във вакуум

§ 4.1. Точни решения на линейното вълново уравнение

В този параграф ние получаваме и изследваме нов клас от сферично-симетрични решения с крайна енергия на вълновото уравнение

$$\Delta E - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \quad (4.1)$$

Тяхната еволюция се характеризира с радиално разширение на профила на интензитета и с формирането на вътрешни и външни фронтове.

За намирането на точни решения на линейното вълново уравнение (4.1) предлагаме опростения анзац на Курант-Хилберт [40] във вида

$$E(x, y, z, t) = A(x, y, z, t) \exp[ik_0(z - vt)], \quad (4.2)$$

приложен към вълновото уравнение (4.1). Като резултат от заместването на (4.2) в (4.1) получаваме следното дифракционно уравнение за амплитудната функция A

$$-2ik_0 \left(\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial A}{\partial t} \right) = \Delta A - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}, \quad (4.3)$$

където v е фазовата скорост (или груповата скорост във въздух когато дисперсията от втори ред е пренебрегната). Амплитудното уравнение (4.3) е от псевдо-параболичен тип и за него може да бъде поставена коректна смесена задача. Вълновото уравнение (4.1) обаче е от хиперболичен тип и формулирането на начална задача към него може да бъде проблематично.

4.1.1. Линеен режим на оптичните импулси

Ще решим диференциалното уравнение (4.3) чрез използване на пространствената трансформация на Фурие спрямо компонентите на амплитудната функция A . Фундаменталното решение за Фурие-образа \hat{A} в (k_x, k_y, k_z, t) -пространството е

$$\hat{A}(k_x, k_y, k_z) = \hat{A}(k_x, k_y, k_z, 0) \exp\left\{i v \left(k_0 \pm \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + (k_z - k_0)^2} \right) t\right\}. \quad (4.4)$$

Точно решение на уравнение (4.3) може да бъде получено чрез използване на обратната трансформация на Фурие

$$\begin{aligned} A &= F^{-1} \left[\hat{A}(k_x, k_y, k_z, 0) \exp\left\{i v \left(k_0 \pm \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + (k_z - k_0)^2} \right) t\right\} \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(k_x, k_y, k_z, 0) \exp\left\{i v \left(k_0 \pm \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + (k_z - k_0)^2} \right) t\right\} \\ &\quad \times \exp\{-i(xk_x + yk_y + zk_z)\} dk_x dk_y dk_z. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Замествайки $k_z - k_0 = \hat{k}_z$ в (4.5), получаваме

$$A = \frac{1}{(2\pi)^3} \exp\{-ik_0(z-vt)\} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(k_x, k_y, \hat{k}_z + k_0, 0) \exp\{iv\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \hat{k}_z^2}t\} \times \exp\{-i(xk_x + yk_y + z\hat{k}_z)\} dk_x dk_y d\hat{k}_z. \quad (4.6)$$

Можем да решим обратната трансформация на Фурие в (4.6), ако представим Фурие-образа $\hat{A}(k_x, k_y, \hat{k}_z + k_0, 0)$ на началните условия като функция от вида $f(k_0)\hat{A}^*(k_x, k_y, \hat{k}_z, 0)$. Тогава (4.6) се записва като

$$A = \frac{1}{(2\pi)^3} \exp\{-ik_0(z-vt)\} f(k_0) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}^*(k_x, k_y, \hat{k}_z, 0) \exp\{iv\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \hat{k}_z^2}t\} \times \exp\{-i(xk_x + yk_y + z\hat{k}_z)\} dk_x dk_y d\hat{k}_z, \quad (4.7)$$

където целият израз под интеграла в (4.7) зависи само от транслирания вълнов вектор \hat{k}_z и може да се реши аналитично.

4.1.2. Точно решение с начално условие Гаусов куршум

На базата на полученото в [27] решение с начално условие Гаусов куршум, представено с цел да илюстрираме в детайли метода за намиране на локализирани решения с крайна енергия на амплитудното уравнение (4.3) и вълновото уравнение (4.1), предлагаме следния метод за намиране на сферично-симетрични решения на вълновото уравнение. Нека началната амплитудна функция е произведение на тримерна локализирана гладка функция, умножена по плоска вълна с противоположна посока

$$A(x, y, z, 0) = \exp\{-ik_0 z\} A^*(x, y, z, 0), \quad (4.8)$$

където A^* е сферично-симетрична функция. Тогава съответната начална функция за вълновото уравнение ще бъде $E(x, y, z, 0) = A^*(x, y, z, 0)$ и чрез решаване на началната задача (4.7) с начални условия от вида (4.8), ние можем да намерим точни решения на вълновото уравнение (4.1).

4.1.3. Сферично-симетрични решения на вълновото уравнение

Един по-внимателен анализ на решението на амплитудната функция в уравнение (4.7) показва, че всички функции под интеграла зависят от транслирания вълнов вектор \hat{k}_z , с изключение на Фурие-образа на началните условия, който зависи от $(\hat{k}_z + k_0)$, т.е. имаме $\hat{A}(k_x, k_y, \hat{k}_z + k_0, 0)$. Ще използваме известната *Теорема за преместването*, за да представим образа $\hat{A}(k_x, k_y, \hat{k}_z + k_0, 0)$ като функция само на транслирания вълнов вектор \hat{k}_z , т.е. $\hat{A} = f(k_0)\hat{A}^*(k_x, k_y, \hat{k}_z, 0)$. Формално това съответства на използване на начални условия от вида

$$A(x, y, z, 0) = \exp\{-ik_0 z\} A^*(x, y, z, 0). \quad (4.9)$$

Прилагайки *Теоремата за преместването* към (4.9), за Фурие-образа на началните условия получаваме

$$F[A(x, y, z, 0)] = \hat{A}(k_x, k_y, k_z - k_0, 0) = \hat{A}^*(k_x, k_y, \hat{k}_z, 0).$$

Следователно всички функции в обратната трансформация на Фурие (4.7) зависят само от транслирания вълнов вектор \hat{k}_z

$$A = \frac{1}{(2\pi)^3} \exp\{-ik_0(z-vt)\} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}^*(k_x, k_y, \hat{k}_z, 0) \exp\{\pm ivt\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \hat{k}_z^2} t\} \times \exp\{-i(xk_x + yk_y + z\hat{k}_z)\} dk_x dk_y d\hat{k}_z. \quad (4.10)$$

Ще разглеждаме сферично-симетрични функции от вида $A^*(x, y, z, 0) = A^*(r, 0)$, където $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Това означава, че обратната радиална трансформация на Фурие може да се запише като

$$A = \frac{1}{2\pi^2 r} \exp(-ik_0(z-vt)) \int_0^{\infty} \hat{k}_r \hat{A}^*(\hat{k}_r, 0) \exp(\pm ivt\hat{k}_r) \sin(r\hat{k}_r) d\hat{k}_r. \quad (4.11)$$

Така методът за намиране на сферично-симетрични решения с крайна енергия на вълновото уравнение става ясен. Използвайки начално условие от вида $A = \exp(-ik_0 z) A^*(r)$, където $A^*(r)$ е локализирана функция и $A^*(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, намираме неговия Фурие-образ $\hat{A}^*(\hat{k}_r, 0)$. След това решавайки обратната трансформация на Фурие (4.11), можем да намерим точно решение на дифракционното уравнение (4.3). Умножавайки решението на диференциалното уравнение (4.3) с главната фаза (анзаца на Курант-Хилберт (4.2)), на практика намираме точно решение на вълновото уравнение (4.1).

Чрез горе-описания метод можем са намерени решения с крайна енергия за следните начални алгебрични локализирани функции от вида

$$1) A^*(x, y, z, 0) = 1/(1+r^2/r_0^2), \quad 2) A^* = 1/(1+r^2/r_0^2)^2, \quad 3) A^* = 1/(1+r^2/r_0^2)^4, \\ 4) A^* = 24(1-r^2)/(1+r^2)^4 \quad 5) A^* = 2r(3-r^2)/(1+r^2)^3.$$

След пресмятане на Фурие-образите на A^* и спектралното ядро (4.11) на (4.3) намираме съответните точни решения на линейното вълново уравнение (4.1)

$$1) E(x, y, z, t) = 1 / \left(\frac{r^2}{r_0^2} + \left(1 + \frac{ivt}{r_0} \right)^2 \right), \quad (4.12)$$

$$2) E(x, y, z, t) = \frac{(r_0 + itv)}{(r^2 + (r_0 + itv)^2)^2}, \quad (4.13)$$

$$3) E(x, y, z, t) = 6 \frac{(8 + 29ivt) + tv(t^2 v^2 - r^2)((8 + itv)tv - ir^2) - 2tv((20 + 13itv)tv - 3ir^2)}{(r^2 + (r_0 + itv)^2)^4}, \quad (4.14)$$

$$4) E(x, y, z, t) = \frac{3i}{4\pi r} \left(\frac{1}{(vt + r - i)^4} - \frac{1}{(-vt + r + i)^4} \right), \quad (4.15)$$

$$5) E(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 r} \left(\frac{1}{(vt - r - i)^3} - \frac{1}{(vt + r - i)^3} \right). \quad (4.16)$$

Получените по-горе аналитични решения (4.12), (4.13), (4.14), (4.15) и (4.16) на линейното вълново уравнение (4.1) са сферично-симетрични. Полагайки времевата променлива $t=0$ в тези решения, виждаме, че началните условия за линейното вълново уравнение са точно съответните локализирани гладки функции A^* . В тези случаи началните функции намаляват с образуване на вътрешни и външни фронтове и плътностите на енергията се разпространяват по цялото пространство радиално. Тези процеси на разпространение са илюстрирани за сферично-симетричното решение (4.16) на Фиг. 4.1.

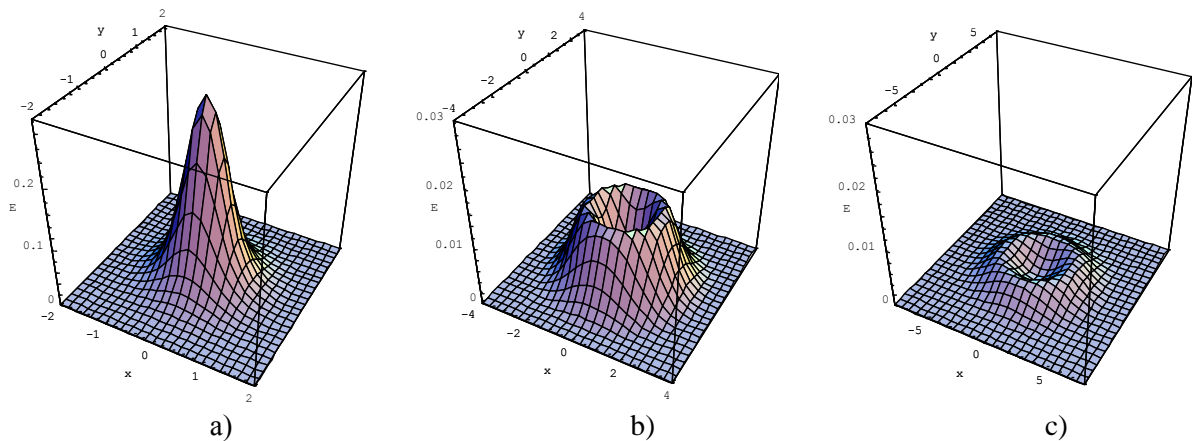
Фундаменталните решения на линейното вълново уравнение (4.1) $\sin(k_0 r)/r$ и $\exp(ik_0 r)/r$ са локализирани функции, но интегралът на енергията

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) dx dy dz \approx \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 2|\vec{E}|^2 dx dy dz \quad (4.17)$$

за тях е безкраен [41]. Локализираните решения с крайна енергия на вълновото уравнение (4.1) са намерени за ограничен набор от начални функции [42]. Предложеният от нас метод значително разширява класа от локализираните начални функции, за които могат да бъдат намерени аналитични решения с крайна енергия на уравнението (4.1). Ще покажем, че енергията на точното решение (4.12) е крайна. Интегралът на енергията W в сферични координати е

$$W = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} |\vec{E}|^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = 8\pi \int_0^{\infty} |\vec{E}|^2 r^2 dr. \quad (4.18)$$

При $t=0$ за аналитичното решение (4.12) той приема стойността $W = 2\pi^2$. Всички решения на линейното вълново уравнение удовлетворяват закона за запазване на енергията. Следователно за всяко $t \neq 0$ интегралът на енергията (4.18) няма да се промени и ще приема отново стойността $W = 2\pi^2$. Ние проверихме този факт с помощта на системата МАТНЕМАТИСА за $t \in [1, 20]$. С помощта на системата МАТНЕМАТИСА проверихме, че другите аналитични решения (4.13), (4.14), (4.15) и (4.16) също притежават крайна енергия.



Фиг. 4.1 Времевата еволюция на профила на интензитета I на сферично-симетричното аналитично решение (4.16) на вълновото уравнение (4.1) за $v=1$. Началната локализирана функция намалява с оформянето на външни и вътрешни фронтове, докато плътността на енергията се разпространява по цялото пространство за крайно време.

§ 4.2. Разпространение на импулси с широк спектър в нелинеен вакуум

Целта на § 4.2. е да изследваме разпространението на лазерни импулси в нелинеен вакуум и да намерим аналитични решения със собствен ъглов момент. През 1935 г. Ойлер, Хайзенберг и Коскел [43,44] решават задачата за нелинеен електромагнитен вакуум, обусловена от нелинейната поляризация на електрон-позитронни двойки. Те получават следния диелектричен тензор, зависещ от характеристиките на полето

$$\varepsilon_{ik} = \delta_{ik} + \frac{7e^4\hbar}{45\pi n^4 c^7} \left[2(|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2)\delta_{ik} + 7B_i B_k \right], \quad (4.19)$$

където компонентите на електричното поле E_i и на магнитното поле B_i са комплексни величини. Членът $B_i B_k \equiv 0$ в случая, когато изследваме локализирана електромагнитна вълна с една магнитна компонента B_l . Следователно диелектричният отклик, съответстващ на такъв оптичен импулс, е

$$\varepsilon_{ik} = \delta_{ik} + \frac{14e^4\hbar}{45\pi n^4 c^7} \left(|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2 \right) \delta_{ik}. \quad (4.20)$$

От израза (4.20) се вижда, че за електромагнитна вълна с една магнитна компонента, нелинейната поляризация на вакуума (4.19) в теорията на Ойлер-Хайзенберг е еквивалентна на нелинейния член в теорията на Борн-Инфелд [1]. В случая когато изследваме лазерни импулси с широк спектър ($\Delta k_z \cong k_0$), системата от амплитудни уравнения в нелинеен вакуум има вида

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \gamma \left(|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2 \right) \vec{E} &= 0, \\ \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \gamma \left(|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2 \right) \vec{B} &= 0, \end{aligned} \quad (4.21)$$

където \vec{E} и \vec{B} са амплитудните функции и $\gamma = \frac{7k_0^2 e^4 \hbar}{90\pi n^4 c^7}$. Компонентите на електричното и магнитното поле могат да бъдат представени като векторна сума от кръгови и линейни компоненти E_z , $E_c = iE_x - E_y$, $B_l = -B_z$. Следователно векторната система (4.21) се трансформира в следната система от скаларни уравнения

$$\begin{aligned} \Delta E_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} + \gamma \left(|E_z|^2 + |E_c|^2 - |B_l|^2 \right) E_z &= 0, \\ \Delta E_c - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_c}{\partial t^2} + \gamma \left(|E_z|^2 + |E_c|^2 - |B_l|^2 \right) E_c &= 0, \\ \Delta B_l - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_l}{\partial t^2} + \gamma \left(|E_z|^2 + |E_c|^2 - |B_l|^2 \right) B_l &= 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Нека да параметризираме 3+1 пространство-времето на Минковски посредством псевдосферични координати $(r, \tau, \theta, \varphi)$

$$\begin{aligned} ict &= r \sinh \tau, & z &= r \cosh \tau \cos \theta, \\ y &= r \cosh \tau \sin \theta \sin \varphi, & x &= r \cosh \tau \sin \theta \cos \varphi, \end{aligned}$$

където $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2}$.

Системата уравнения (4.22) в псевдо-сферични координати се записва като

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \tau^2} - 2 \frac{\tanh \tau}{r^2} \frac{\partial E_z}{\partial \tau} \\
& \quad + \frac{1}{r^2 \cosh^2 \tau} \Delta_{\theta, \varphi} E_z + \gamma \left(|E_z|^2 + |E_c|^2 - |B_l|^2 \right) E_z = 0, \\
& \frac{3}{r} \frac{\partial E_c}{\partial r} + \frac{\partial^2 E_c}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_c}{\partial \tau^2} - 2 \frac{\tanh \tau}{r^2} \frac{\partial E_c}{\partial \tau} \\
& \quad + \frac{1}{r^2 \cosh^2 \tau} \Delta_{\theta, \varphi} E_c + \gamma \left(|E_z|^2 + |E_c|^2 - |B_l|^2 \right) E_c = 0, \\
& \frac{3}{r} \frac{\partial B_l}{\partial r} + \frac{\partial^2 B_l}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_l}{\partial \tau^2} - 2 \frac{\tanh \tau}{r^2} \frac{\partial B_l}{\partial \tau} \\
& \quad + \frac{1}{r^2 \cosh^2 \tau} \Delta_{\theta, \varphi} B_l + \gamma \left(|E_z|^2 + |E_c|^2 - |B_l|^2 \right) B_l = 0.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Ще търсим решението на системата уравнения (4.23) посредством метода на разделяне на променливите $E_i(r, \tau, \theta, \varphi) = R(r)T_i(\tau)Y_i(\theta, \varphi)$, $B_l(r, \tau, \theta, \varphi) = R(r)T_l(\tau)Y_l(\theta, \varphi)$, където $i = z, c$, и с допълнително ограничително условие върху ъгловата и времевата части

$$|T_z|^2 |Y_z(\theta, \varphi)|^2 + |T_c|^2 |Y_c(\theta, \varphi)|^2 - |T_l|^2 |Y_l(\theta, \varphi)|^2 = \text{const.} \tag{4.24}$$

Условие (4.24) служи за разделяне на променливите. По този начин нелинейните членове участват само в радиалните части на уравненията, които удовлетворяват уравнението

$$\frac{3}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} - \frac{C_i}{r^2} R + \gamma |R|^2 R = 0, \tag{4.25}$$

където $C_i, i = z, c, l$, са константи на разделяне. Ще търсим решенията на (4.25) във вида

$R = \frac{1}{r \cosh(\ln r^\alpha)}$, където α, γ и константите $C_i, i = z, c, l$, удовлетворяват отношенията $\alpha^2 - 1 = C_i, 2\alpha^2 = \gamma$. Уравненията за функциите $T_i(\tau), i = z, c, l$, са линейни

$$\cosh^2 \tau \frac{d^2 T_i}{d\tau^2} + 2 \sinh \tau \cosh \tau \frac{dT_i}{d\tau} + (D_i - C_i \cosh^2 \tau) T_i = 0, \tag{4.26}$$

където D_i са други константи на разделяне, свързани с ъгловата част на оператора на Лаплас $Y_i(\theta, \varphi)$. Получаваме следните единствени решения на (4.26), които удовлетворяват ограничителното условие (4.24)

$$T_z = \cosh \tau, \quad T_c = \cosh \tau, \quad T_l = \sinh \tau \tag{4.27}$$

със стойности на константите на разделяне: за електричната част $C_z = C_c = 3, D_z = D_c = 2$ и за магнитната част $C_l = 3, D_l = 0$. Следователно магнитната част на системата уравнения (4.25) не зависи от ъгловите компоненти, т.е. $Y_l(\theta, \varphi) = 1$. За електричната част $Y_z(\theta, \varphi), Y_c(\theta, \varphi)$ получаваме системата линейни уравнения

$$\frac{\Delta_{\theta, \varphi} Y_i}{Y_i} = -2, \tag{4.28}$$

където $i = z, c$. Решенията на (4.28), които удовлетворяват ограничителното условие (4.24), са

$$Y_z = \cos \theta, \quad Y_c = \sin \theta \exp(i\varphi). \tag{4.29}$$

От отношенията между константите на разделяне C_i и реалните числа α и γ получаваме $\alpha^2 = 4$, $\alpha = \pm 2$, $\gamma = 8$. Като краен резултат получаваме точното решение на системата нелинейни уравнения (4.23), която описва разпространението на електромагнитна вълна в нелинеен вакуум

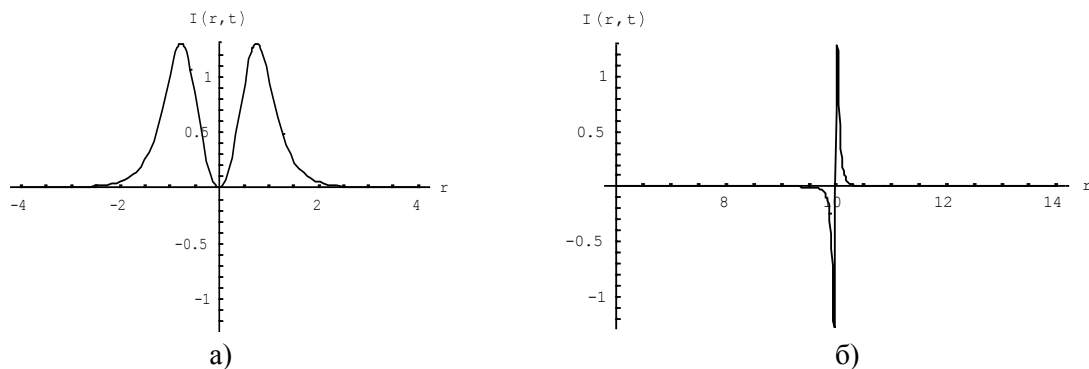
$$\begin{aligned} E_z(r, \tau, \theta, \varphi) &= \frac{\operatorname{sech}(\ln r^{\pm 2})}{r} \cosh \tau \cos \theta, \\ E_c(r, \tau, \theta, \varphi) &= \frac{\operatorname{sech}(\ln r^{\pm 2})}{r} \cosh \tau \sin \theta \exp(i\varphi), \\ B_l(r, \tau, \theta, \varphi) &= \frac{\operatorname{sech}(\ln r^{\pm 2})}{r} \sinh \tau, \end{aligned} \quad (4.30)$$

което, записано в декартови координати, добива вида

$$E_z(x, y, z, t) = \frac{2z}{r^4 + 1}, \quad E_c(x, y, z, t) = \frac{2(x + iy)}{r^4 + 1}, \quad B_l(x, y, z, t) = \frac{2ict}{r^4 + 1} \quad (4.31)$$

с е означено $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2}$. Не е трудно да се покаже, че аналитичното решение (4.31) на системата уравнения (4.23) е с крайна енергия и притежава ъглов момент $l=1$ за електричното поле. Решението (4.31) представя нелинейна сферична ударна вълна. Профилът на интензитета $I = \left(|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2 \right)$ на решение (4.31) в декартови координати се записва по следния начин

$$I(x, y, z, t) = \frac{4r^2}{(r^4 + 1)^2} = \frac{4(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2)}{\left[(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2)^2 + 1 \right]^2}. \quad (4.32)$$



Фиг. 4.2. Вревата еволюция на профила I (4.32) на интензитета на решението (4.31) във вакуум на Ойлер ($c=1$) за $t=0$ и $t=10$ съответно. Нелинейната вълна има различна еволюция в сравнение с линейната вълна: ударната вълна запазва амплитудния си максимум и се самокомпресира по посока на променливата r .

Еволюцията на профила (4.32) на интензитета I на (4.31) е представена на Фиг. 4.2 за $t=0$ и $t=10$. Използвана е нормирана скала $c=1$. От графиките ясно се вижда, че решението (4.31) описва нелинейна сферична ударна вълна във вакуум. Разпространението на ударната вълна се различава от това на линейните вълни (4.12)-(4.16): докато линейното решение се разширява сферично, то ударната вълна запазва амплитудния си максимум и се самокомпресира по посока на променливата r . Такава вълна с висок интензитет може да се генерира не само от лазерни

източници, но също така може да бъде резултат и от ядрена реакция, в началото на която се наблюдава нелинейна поляризация на виртуални електрон-позитронни двойки.

Глава 5. Взаимодействие на лазерни импулси на една и съща носеща честота посредством изроденото четири-фотонно вълново смесване

През последните години са проведени серии от експерименти по пресичане на мощни лазерни импулси под малък ъгъл в нелинеен режим на разпространение. Когато мощността е малко над критичната за самофокусировка P_{cr} , се наблюдава периодичен обмен на енергия в областта на препокриване на лазерните импулси [45]-[47]. В [45]-[47] феноменът на енергообмен между импулсите е обяснен на базата на механизма на формиране на плазмена решетка, която създава периодично модулиран показател на пречупване. Проблемът е, че плътността на плазмата за лазерни импулси при интензитети малко над P_{cr} не е достатъчна да осигури създаването на плазмена решетка. Това е причината в настоящата глава да потърсим други механизми, водещи до обмен на енергия и свързани с нелинейни оптични ефекти. Ние вземаме под внимание следните експериментални факти: Първо, лазерните импулси, разпространяващи се по различни оптични траектории, винаги се пресичат с относителна фазова разлика. Това означава, че в областта на пресичане възникват условия за нелинейно вълново смесване на базата на изродени четири-фотонни вълнови процеси. Както е отбелязано в [48], тези процеси играят важна роля и в генерацията на мулти-компонентната филаментация. Друго важно експериментално наблюдение е, че по време на мулти-филаментното разпространение има съществено намаление на броя на филamente като функция на разстоянието [49]-[51]. Досега в литературата не сме забелязали физически модел, обясняващ това явление.

В тази глава предлагаме нелинеен векторен модел, включващ изродени четири-фотонни вълнови процеси. Изследваме числено взаимодействието между оптични импулси в случаите когато 1) компонентите на вектора на поляризация са разделени, 2) филamente съдържат и двете поляризационни компоненти (компонентите на поляризацията не са разделени – общият случай). Феноменът на редуция на броя на филamente по време на мулти-филаментното разпространение също е изучен в рамките на представения модел. Нашият анализ показва, че това явление би могло да се обясни чрез сдвояване на филamente и обмена на енергия, дължащ се на изроденото четири-фотонно вълново смесване. Числената схема е реализирана на базата на алгоритъм, използващ split-step Фурие метода [23].

§ 5.1. Нелинейна поляризация на средата

Стандартният модел на филаментация е базиран на пораждането на плазма и мулти-фотонни процеси и също така включва нелинейната поляризация, предложена от Макер и Терхюн [52], която има вида

$$\vec{P}^{nl} = n_2 \left[(\vec{E} \cdot \vec{E}^*) \vec{E} + \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{E}) \vec{E} \right]. \quad (5.1)$$

Тук с n_2 е означен нелинейният показател на пречупване.

В случая на двукомпонентно електрично поле $\vec{E} = (E_x, E_y, 0)$ освен самовъздействие възникват и членове, описващи крос-модулацията и изроденото четири-фотонно вълново смесване. Процесът на самовъздействие разширява спектъра на лазерния импулс – стартирайки от импулс с тесен спектър, стабилният филament става широкоспектърен далеч от източника на

лъчението. В [53], [54] е показано, че еволюцията на импулси с широк спектър като филаментите не може да бъде описана коректно от нелинейната поляризация от вида (5.1). По-коректно е (виж [52], [54]) да се използва обобщеният нелинеен оператор

$$\vec{P}^{nl} = n_2 (\vec{E} \cdot \vec{E}) \vec{E}, \quad (5.2)$$

който включва допълнителни процеси, свързани с генериране на трета хармонична. Анализът, проведен в дисертацията показва, че нелинейната поляризация (5.2) не е приложима към скаларен модел, понеже съответните закони за запазване на Manley-Rowe не са изпълнени. Ето защо ние полагаме в нелинейните оператори (5.1) и (5.2) двукомпонентно електрично поле на една и съща носеща честота, което има вида

$$\vec{E} = \frac{(A_x \exp(i\omega_0 t) + c.c.)}{2} \vec{x} + \frac{(A_y \exp(i\omega_0 t) + c.c.)}{2} \vec{y}, \quad (5.3)$$

където $A_x = A_x(x, y, z, t)$ и $A_y = A_y(x, y, z, t)$ са амплитудните функции на електричното поле, а ω_0 е носещата честота на лазерния източник. Компонентите на поляризацията от общ вид (5.2) в случая на двукомпонентното електрично поле (5.3) са

$$\begin{aligned} \vec{P}_x^{nl} &= \frac{3}{8} n_2 \left[\frac{1}{3} (A_x^2 + A_y^2) A_x \exp(2i\omega_0 t) + \left(|A_x|^2 + \frac{2}{3} |A_y|^2 \right) A_x + \frac{1}{3} A_x^* A_y^2 \right] \exp(i\omega_0 t) + c.c., \\ \vec{P}_y^{nl} &= \frac{3}{8} n_2 \left[\frac{1}{3} (A_x^2 + A_y^2) A_y \exp(2i\omega_0 t) + \left(|A_y|^2 + \frac{2}{3} |A_x|^2 \right) A_y + \frac{1}{3} A_y^* A_x^2 \right] \exp(i\omega_0 t) + c.c. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Нелинейния оператор (5.2) $\vec{P}^{nl} = n_2 (\vec{E} \cdot \vec{E}) \vec{E}$ е обобщение на този на Макер и Терхюн (5.1), като в (5.2) възникват и допълнителни членове, асоциирани с генерацията на трета хармонична.

§ 5.2. Основна система от уравнения

Динамиката на импулсите с тесен спектър може коректно да се опише в рамките на параксиалната оптика. Експериментите по филаментация демонстрират типична еволюция на спектъра на импулса. В процеса на филаментация началната самофокусировка разширява значително спектъра на импулса. Широкият спектър ($\Delta k_z \approx k_0$) е една от основните характеристики на стабилния филамент. Еволюцията на така получения филамент не може вече да се опише в рамките на параксиалната оптика, тъй като тя работи коректно само за тясно-спектрални импулси. Динамиката на широко-спектрални импулси може да се опише коректно в рамките на различни модели на непараксиална оптика, като URPE моделите [55] или непараксиалните амплитудни уравнения на електричното поле [25]. Друго стандартно ограничение в теорията по филаментация е използването на еднокомпонентно скаларно приближение на електричното поле \vec{E} . Това приближение е в противоречие със съвременните резултати, в които се наблюдава ротация на вектора на поляризация [56]. Поради тази причина в настоящото изследване използваме непараксиален векторен модел, отчитащ втория ред на дисперсията и в който нелинейните ефекти се описват чрез нелинейните компоненти на поляризацията (5.4). Системата от непараксиални уравнения за амплитудните функции A_x и A_y на двукомпонентното електрично поле (5.3) в безразмерни координати и Галилеева координатна система ($z' = z - v_g t, t' = t$) има вида

$$\begin{aligned}
-2i\alpha\delta^2 \frac{\partial A_x}{\partial t} &= \Delta_{\perp} A_x - \delta^2(\beta+1) \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial t \partial z} \right) - \delta^2 \beta \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\
&+ \gamma \left[\frac{1}{3} (A_x^2 + A_y^2) A_x \exp(2i(\alpha z - \tilde{\omega}_{nl} t)) + \left(|A_x|^2 + \frac{2}{3} |A_y|^2 \right) A_x + \frac{1}{3} A_x^* A_y^2 \right], \\
-2i\alpha\delta^2 \frac{\partial A_y}{\partial t} &= \Delta_{\perp} A_y - \delta^2(\beta+1) \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial t \partial z} \right) - \delta^2 \beta \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\
&+ \gamma \left[\frac{1}{3} (A_x^2 + A_y^2) A_y \exp(2i(\alpha z - \tilde{\omega}_{nl} t)) + \left(|A_y|^2 + \frac{2}{3} |A_x|^2 \right) A_y + \frac{1}{3} A_y^* A_x^2 \right],
\end{aligned} \tag{5.5}$$

където $x = x/r_{\perp}$, $y = y/r_{\perp}$ и $z = z/z_0$ са безразмерните координати (тук за удобство щриховете на безразмерните променливи са изпуснати), r_{\perp} е напречният размер на импулса, $z_0 = v_{gr} t$ е надлъжният размер на импулса, $\alpha = k_0 z_0$, $\delta = r_{\perp}/z_0$, $\gamma = k_0^2 r_{\perp}^2 \tilde{n}_2 |A_0|^2$ е нелинейният коефициент, $\tilde{n}_2 = \frac{3}{8} n_2$, $\tilde{\omega}_{nl} = k_0 (z - (v_{ph} - v_{gr}) t_0)$ е нормираната нелинейна честота, v_{gr} и v_{ph} са съответно груповата и фазовата скорости, $\beta = k_0 v_{gr}^2 k_0''$ и k_0'' е дисперсията на груповите скорости. Този модел описва режим на филаментация без йонизация, където интензитетите на импулсите са близки до критичните за самофокусировка.

§ 5.3. Закони за запазване

За да се удовлетворят законите на Manley-Rowe е необходимо да бъдат наложени ограничителни условия. След като представим поляризацията (5.2) чрез кръгово поляризиращи компоненти [23], [48] получаваме, че за да бъдат изпълнени условията на Manley-Rowe за нелинейната система (5.5), включваща нелинейния оператор (5.2), началните условия и решенията на системата трябва да бъдат комплексно-спрегнати полета. Законите за запазване предоставят допълнителна информация за поведението на векторната амплитудна функция: *само компоненти на векторното амплитудно поле $\vec{A} = (A_x, A_y, 0)$, които описват ротация на вектора \vec{A} , удовлетворяват условията на Manley-Rowe.* Ето защо, в нашите числени експерименти и аналитични изследвания ще използваме само комплексно спрегнати компоненти.

§ 5.4. Числен Метод. Обща последователност на алгоритъма

Предложения модел се изследва числено с помощта на алгоритъм, базиран на симетричната форма на “split-step” Фурие-метода [23], приложен за системата ЧДУ (5.5). Числената схема е реализирана на алгоритмичния език FORTRAN. Детайлното описание на алгоритъма е представено в дисертацията.

§ 5.5. Резултати от числените изследвания и сравнение с експериментални данни

Ще изследваме числено следните два основни ефекта в процеса на филаментация – 1) обмена на енергия между два неколинеарни филамента и 2) феномена на редуциране броя на филаментите в процеса на мулти-филаментното разпространение. Числените резултати са представени за начални условия във формата на 240 fs Гаусов куршум с напречен и надлъжен

размер $r_{\perp} = z_0 = 72 \mu\text{m}$. В този случай $\alpha = 200\pi$, $\delta = 1$ и $\tilde{\omega}_{nl} = 0.00023$. За да удовлетворим законите за запазване, вземаме фазовата разлика между началните условия да е $\pi/2$.

5.5.1. Обмен на енергията между два неколинеарни филамента

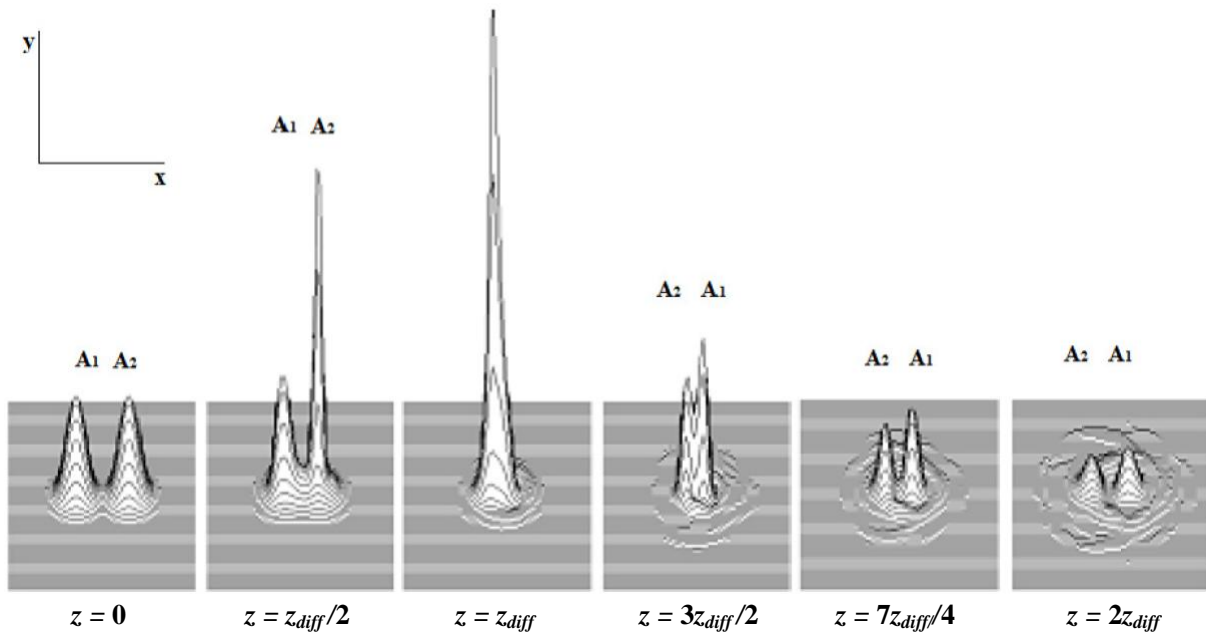
Ще започнем нашето изследване със случая, когато два лазерни импулса на една и съща носеща честота се пресичат под малък ъгъл. Мощността на импулсите е малко над критичната за самофокусировка P_{cr} .

А) Разделени компоненти на поляризацията

Разделянето на компонентите на поляризацията се реализира експериментално посредством система от призми като светлинният импулс пада под ъгъла на Брюстер. В този случай началните условия на системата (5.5) имат вида

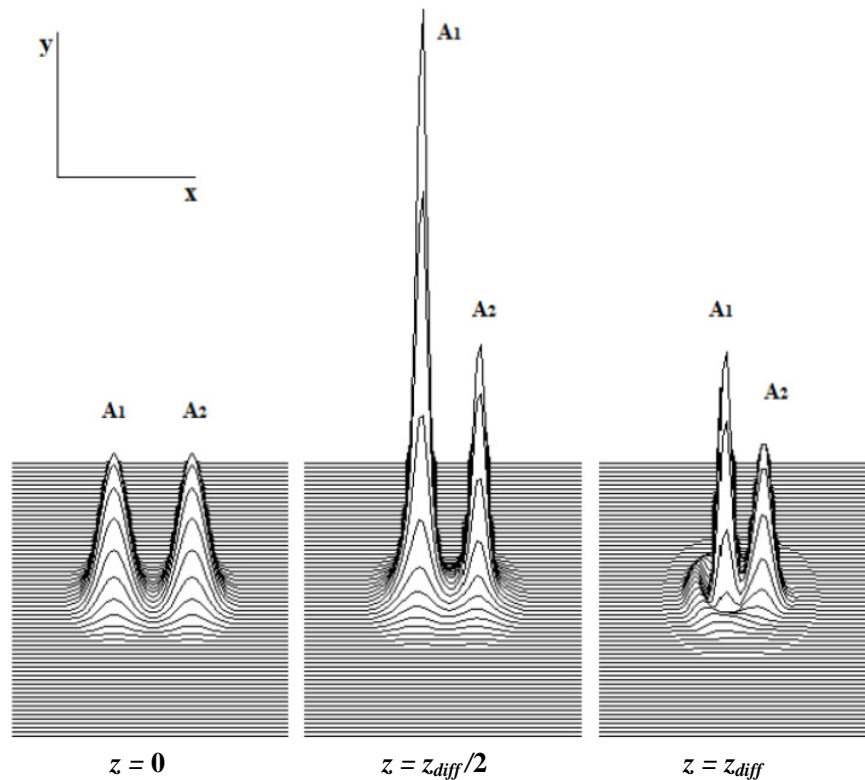
$$\begin{aligned} A_x &= A_x^0 \exp\left(-\frac{(x+a)^2 + y^2 + z^2}{2}\right) \exp(-i\Delta\nu x), \\ A_y &= A_y^0 \exp\left(-\frac{(x-a)^2 + y^2 + z^2}{2}\right) \exp(-i\Delta\nu x) \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right), \end{aligned} \quad (5.6)$$

където a е началното отместване на импулсите по x спрямо точката на пресичане и $2\Delta\nu = 2\nu \sin \theta$ е нормираната относителна напречна скорост на импулсите (θ е ъгълът между двете траектории).



Фиг. 5.1. Динамиката на колизия между две разделени компоненти на поляризацията за начално разстояние между филаментите $2a = 4$, начална разлика между напречните скорости $2\Delta\nu = 3$ и нелинеен коефициент $\gamma = 1.5$. В процеса на сблъскване се наблюдава самофокусировка на импулсите и периодичен обмен на енергия. Началният енергиен трансфер е от A_1 към A_2 .

На Фиг. 5.1 е представено взаимодействието на оптичните импулси $A_1 \equiv A_x$ и $A_2 \equiv A_y$ за $a = 2$, $\Delta\nu = 1.5$ и $\gamma = 1.5$. Ясно се вижда периодичният обмен на енергия и самофокусирутката на A_1 и A_2 . Периодичността на изродения четири-вълнов фотонен процес може да се проследи много добре на Фиг. 5.1. В този случай посоката на началния енергиен трансфер е от A_1 към A_2 .



Фиг. 5.2. Динамиката на колизия между две разделени компоненти на поляризацията при начално разстояние между филаментите $2a = 4$, начална разлика между напречните скорости $2\Delta\nu = 2$ и нелинеен коефициент $\gamma = 1.5$. Стойността на параметъра $2\Delta\nu$ променя началната фазова разлика. В резултат на това посоката на началния енергиен трансфер се променя от A_2 към A_1 .

В нашите изследвания силата и посоката на енергийния трансфер зависят от началното отместване на импулсите a , относителната напречна скорост $\Delta\nu$ и интензитета на лазерния източник γ . Фиг. 5.2 представя подобна числена симулация както Фиг. 5.1 за $\Delta\nu = 1.0$ (вместо $\Delta\nu = 1.5$). В този експеримент посоката на началния трансфер на енергия се променя от A_2 към A_1 . Проведените изследвания потвърждават експерименталните резултати, получени в [47], където се наблюдават подобни зависимости на началната посока на енергообмен от относителната времева задръжка, интензитета на лазерния източник и ъгъла на пресичане ($\Delta\nu = v \sin \theta$).

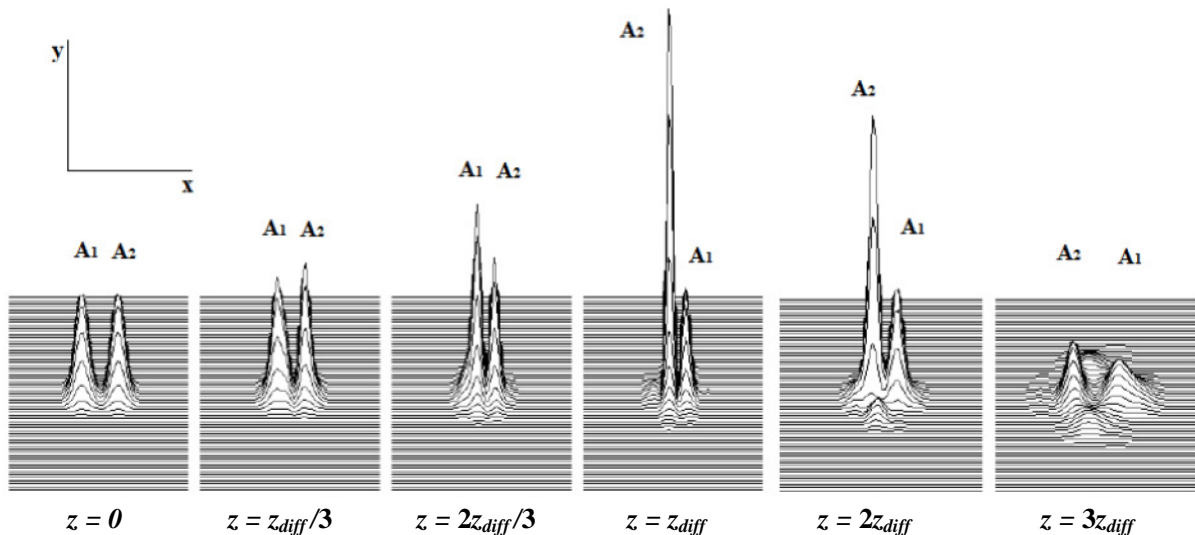
Б) Импулси, съдържащи двете компоненти на поляризацията

Когато лазерният импулс се разделя на две рамена \vec{A}_1 и \vec{A}_2 чрез стандартен сплитер/разделител, получените филаменти съдържат в себе си и двете поляризационни

компоненти. Нека $\vec{A}_j = \vec{A}_{jx}\vec{x} + A_{jy}\vec{y}$, $j=1,2$. Тогава началните условия на системата (5.5) добиват вида

$$\begin{aligned}
 A_x = A_{1x} + A_{2x} &= \frac{A^{01}}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{(x+a)^2 + y^2 + z^2}{2}\right) \exp(-i\Delta\nu x) \\
 &+ \frac{A^{02}}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2 + y^2 + z^2}{2}\right) \exp(i\Delta\nu x) \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right), \\
 A_y = A_{1y} + A_{2y} &= \left\{ \frac{A^{01}}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{(x+a)^2 + y^2 + z^2}{2}\right) \exp(-i\Delta\nu x) \right. \\
 &+ \left. \frac{A^{02}}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2 + y^2 + z^2}{2}\right) \exp(i\Delta\nu x) \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \right\} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right),
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

където A_x и A_y са образувани от x - и y -компонентите на двата оптични импулса, разпространяващи се по различни траектории.

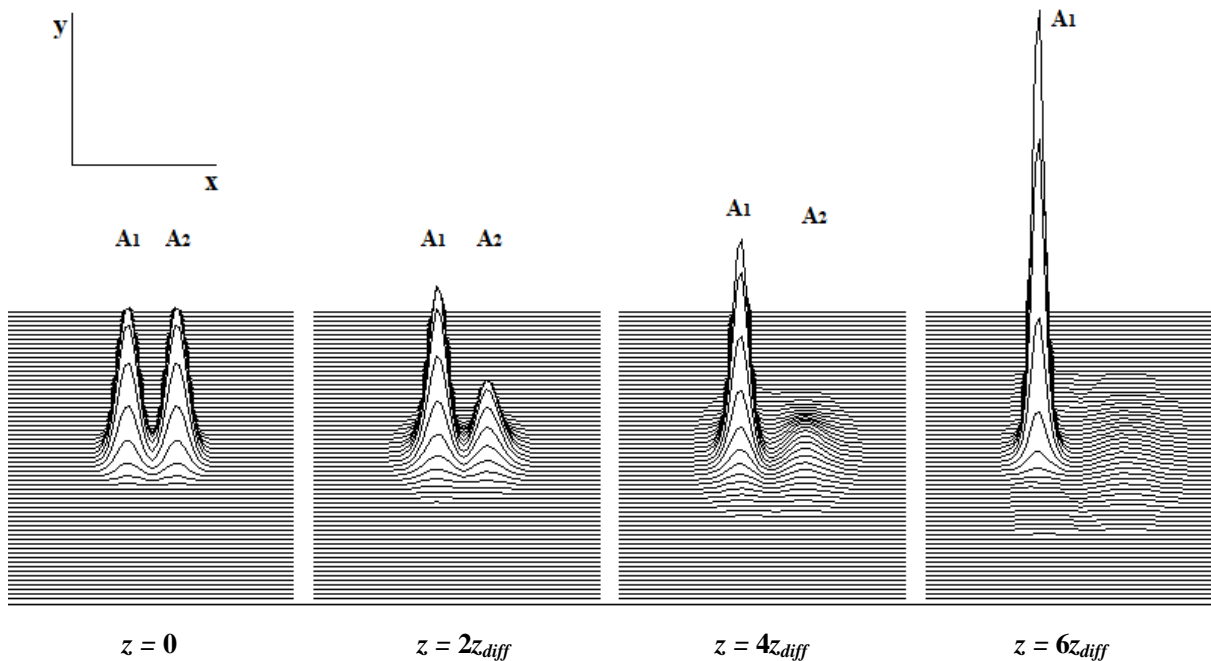


Фиг. 5.3. Еволюцията на два филамента с неразделени поляризационни компоненти за начално разстояние между филаментите $2a=4$, начална разлика между напречните скорости $2\Delta\nu=3$ и нелинеен коефициент $\gamma=1.5$. Наблюдава се самофокусировка на импулсите, периодичен обмен на енергия и в далечната зона – генерация на две допълнителни компоненти в посока, ортогонална на началните импулси.

Взаимодействието на оптичните импулси \vec{A}_1 и \vec{A}_2 за $\gamma=1.5$, $\Delta\nu=1.5$ и $a=2$ е представено на Фиг. 5.3. Както и в предишния случай на разделени поляризационни компоненти, наблюдаваме ефектите на самофокусировка и интензивен обмен на енергия. В далечната зона се появяват две допълнителни компоненти в посока, перпендикулярна на началните импулси. Според нас тези допълнителни компоненти са свързани с процеса на изроденото четири-вълново смесване. Подобни експериментални резултати са представени в [57].

5.5.2. Обмен на енергията между два колинеарни филамента

Разпространението в атмосферата на лазерен импулс с висок интензитет и мощност с два порядъка по-голяма от критичната за самофокусировка, $P \approx 100P_{cr}$, води до неговото разпадане на много компоненти, всяка от които има мощност около P_{cr} [48]. Основната идея е, че процесът на филаментация настъпва като следствие от наличието в началото на условия за синхронизъм върху лазерния фронт на вълната, водещи до усилване на вълната, дължащо се на четири-вълновото смесване. В [51] експериментално е наблюдавано, че броят на филаментите значително се редуцира като функция на разстоянието и времето. Тук е предложен модел, в който намалението на броя на филаментите се дължи на енергообмен, обусловен от изроденото четири-фотонно вълново смесване. Нека да предположим, че два филамента се намират на малко разстояние един от друг. Тогава съществуват условия за тяхното сдвояване и, вследствие на това, настъпва взаимодействие посредством изроденото четири-вълново фотонно смесване. Формулировката на задачата е подобна на последния разгледан случай в предния Раздел 5.5.1. Разглеждаме два филамента \vec{A}_1 и \vec{A}_2 с произволна поляризация. Нека представим векторите чрез техните x - и y -компоненти $\vec{A}_j = A_{jx}\vec{x} + A_{jy}\vec{y}$, $j=1,2$. Тогава началните условия на системата (5.5) имат вида (5.7) с относителна скорост $\Delta v=0$ (следователно $\theta=0$, т.е. филаментите са колинеарни).



Фиг. 5.4. Обмен на енергия между два колинеарни филамента \vec{A}_1 и \vec{A}_2 на малко разстояние един от друг $2a=3.4$, получен чрез числено решаване на системата (5.7) с начални условия (5.26) за стойности на параметрите $\Delta v=0$ и $\gamma=1.5$. Вследствие на изроденото четири-фотонното вълново смесване единият от филаментите се усилва, докато другият навлиза в линейна мода и постепенно изчезва.

На Фиг. 5.4 може да бъде проследена еволюцията на два колинеарни импулса и обмена на енергия, дължащ се на изроденото четири-вълново фотонно смесване. Интензитетът на

лазерния източник е близък до P_{cr} . Наблюдаваме, че единият от импулсите се усилва, самофокусира се и получава достатъчно мощност да продължи своето разпространение, докато другият импулс отдава енергия, навлиза в линеен режим и постепенно дифрактира в пространството. Чрез този механизъм броят на филаментите може да бъде редуциран посредством нелинейни параметрични процеси в $\chi^{(3)}$ среда.

Основни приноси на дисертацията

1) Получени са числени решения, описващи черни дупки с магнитен заряд, куплирани с нелинейна електродинамика на Борн-Инфелд и масивно скаларно поле в рамките на скаларно-тензорните теории на гравитацията в случая на статична, сферично-симетрична метрика на пространство-времето. Анализирани са структурата на черните дупки. В зависимост от стойностите на заряда и масата на черните дупки са намерени решения с един хоризонт, с два хоризонта и екстремални решения. Получените решения са устойчиви относно радиални пертурбации. Анализът, базиран на метода на “точката на обръщане”, предполага глобална устойчивост. Числените резултати потвърждават аналитичните прогнози за качествено поведение на търсените решения.

2) Намерен е нов клас аналитични сферично-симетрични решения с крайна енергия на линейното вълновото уравнение чрез използване на анзаца на Курант-Хилберт. По този начин линейното вълново уравнение се редуцира до дифракционно уравнение за амплитудната функция от псевдо-параболичен тип, което позволява поставянето на коректна начална задача. Решенията описват радиално разпространение с формирането на вътрешни и външни фронтове на вълната. Началната амплитуда на точните решения намалява и плътността на енергията на всички получени решения се разпространява по цялото пространство за крайно време.

3) Нелинейната поляризация на вакуума от тип Ойлер-Хайзенберг е редуцирана до нелинейна поляризация от тип Борн-Инфелд в случай на електромагнитно поле с една магнитна компонента. Получените векторни вълнови уравнения в нелинеен вакуум са решени с помощта на метода на разделяне на променливите в псевдо-сферична координатна система. Полученото точно решение представя сферична ударна вълна със собствен орбитален момент $l=1$ за електричното поле. Докато сферично-симетричните решения на линейното вълново уравнение формират вътрешни и външни фронтове на вълната и амплитудата им значително намалява, то ударната вълна запазва амплитудния си максимум и се самокомпресираща по променливата r .

4) Предложен е нов механизъм за обяснение на феномена на обмен на енергия между пресичащи се под малък ъгъл филаменти, базиран на изродени четири-фотонни параметрични процеси. Численото изследване на предложението тук непараксиален векторен модел потвърждава експерименталните резултати на периодичен енергообмен в областта на прекриване на двата импулса. Също така се потвърждават наблюдаваните в експериментите зависимости на началния трансфер на енергия от относителната напречна скорост (ъгъла на пресичане), интензитета на лазера и началната фазова разлика (разстоянието a). Изследвано е влиянието на изродените четири-фотонни параметрични процеси при мулти-филаментното разпространение. Известен експериментален факт е, че броят на филаментите, притежаващи мощност близка до P_{cr} , намалява при увеличаване на разстоянието от лазерния източник. Обобщена е теорията на Бойд до еволюционни уравнения за взаимодействие на импулсите посредством изроденото четири-фотонно смесване. Резултатът от колинеарното

взаимодействие е, че единият импулс се усилва, докато енергията на другия намалява, той навлиза в линеен режим и дифрактира. Представеният модел показва, че изродените четири-фотонни вълнови процеси са естествено обяснение на ефекта на редуциране на броя на филламентите, когато мощността е близка до P_{cr} .

Получените резултати в дисертацията имат научно-приложен характер.

Списък на публикациите по темата на дисертацията

1. D. Georgieva, I. Stefanov, M. Todorov, S. Yazadjiev, Born-Infeld Black Holes Coupled to a Massive Scalar Field, *International Journal of Modern Physics D* **20**(13), (December 23 2011), 2471-2496 (**IF 1.046**).
2. D. Georgieva, I. Stefanov, M. Todorov, S. Yazadjiev, Numerical Investigation of Charged Black Holes in the Scalar-Tensor Theories of Gravity with Massive Scalar Field, in *Proc. of 3rd Annual Meeting of the Bulgarian Section of SIAM, December 22-23, 2008*, Sofia, pp. 37-40, 2009.
3. L. Kovachev, D. Georgieva, K. Kovachev, Electromagnetic Shock Wave in Nonlinear Vacuum: Exact Solution, *Optics Letters* **37**(19), (October 1 2012), 4047-4049, arXiv: 1208.3616v [physics.optics] 17 Aug 2012 (**IF 3.385**).
4. L. Kovachev, D. Georgieva, A Class of Localized Solutions of the Linear and Nonlinear Wave Equations, *Journal of Geometry and Symmetry in Physics* **27**, 67-82, (2012) (H = 6, **SJR = 0.438**, SNIP = 0.708, Scopus System), ISSN 1312-5192.
5. D. Georgieva, L. Kovachev, Analytical Solutions of the Linear Wave Equation with Finite Energy, in *Proc. of the 4th International conference AMiTaNS'12, St. St. Constantine and Helena, Bulgaria, 2012*, AIP CP**1487**, October 26, 2012, pp. 264-271 (**SJR = 0.164**).
6. D. Georgieva, L. Kovachev, Energy transfer between two filaments due to degenerate four-photon parametric process, under review in *Journal of Optical Society of America B* (**IF 2.210**); arXiv: 1404.3578v1 [physics.optics] 14 Apr 2014.

Благодарности

На първо място изказвам благодарност на научните си ръководители проф. д-р Михаил Тодоров и доц. д-р Любомир Ковачев, които ме въведоха в интересните и пълни с предизвикателства тематика на дисертационния труд. Бих искала да изкажа и благодарността си на проф. д-р Стойчо Язджиев и неговия докторант гл. ас. д-р Иван Стефанов за съвместната работа с тях. Признателна съм на доц. д-р Елена Върбанова за ценните съвети, дадени от нея.

Благодарна съм на моите родители за тяхната обич и подкрепа през всичките години.

Даниела Георгиева

Цитирана литература

- [1] M. Born and L. Infeld, *Proc. R. Soc. London A* **143** (1934) 410.
- [2] E. Fradkin and A. Tseytlin, *Phys. Lett. B* **163** (1985) 123.
- [3] E. Bergshoeff, E. Sezgin, C. Pope and P. Townsend, *Phys. Lett. B* **188** (1987) 70.
- [4] R. Metsaev, M. Rahmanov and A. Tseytlin, *Phys. Lett. B* **193** (1987) 207.
- [5] R. Leigh, *Mod. Phys. Lett. A* **4** 2767 (1989).
- [6] A.N. Tikhonov and A.A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1990) (in Russian) (English translation: Dover Publications, New York, 1990).
- [7] T.L. Boyadjiev, M.D. Todorov, P.P. Fiziev and S.S. Yazadjiev, *J. Comp. Phys.* **166**(2), 253–270, (2001).

- [8] T.L. Boyadjiev, M.D. Todorov, P.P. Fiziev and S.S. Yazadjiev, *J. Comp. Appl Math.* **145**(1), 113–131, (2002).
- [9] T.L. Boyadjiev, M.D. Todorov, P.P. Fiziev and S.S. Yazadjiev, *J. Comp. Methods in Sci. and Eng.*, **2** (1-2), 245–252, (2002).
- [10] P. Fiziev, S. Yazadjiev, T. Boyadjiev and M. Todorov, *Phys. Rev D* **61** (2000) 124018–1.
- [11] T. Boyadjiev, P. Fiziev and S. Yazadjiev, *Class. Quant. Grav.*, **16**, 2359–2380, (1999).
- [12] M.K. Gavurin, *Izvestia VUZ, Matematika* **14**(6) (1958) 18–31 (in Russian) [see also *Math. Rev.* **25**(2) (1963) 1380].
- [13] E.P. Jidkov, G.I. Makarenko and I.V. Puzynin, in *Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei* ((Joint Institute for Nuclear Research (JINR)), Dubna, 1973), Vol. **4**, Part I, pp. 127–166 (in Russian), English translation: *American Institute of Physics*, p. 53.
- [14] В.В. Ермаков, Н.Н. Калиткин, *ЖВМ и МФ*, **21** (2), 1981, 491–497.
- [15] Т. Жанлау, И. Пузынин, *ЖВМ и МФ*, **32** (6), 1992, 846–856.
- [16] Т. Жанлау, И. Пузынин, *ЖВМ и МФ*, **34** (2), 1994, 175–184.
- [17] I. Stefanov, S. Yazadjiev and M. Todorov, *Phys. Rev. D* **75** 084036 (2007).
- [18] P.A. Franken, A.E. Hill, C.W. Peters and G. Weinreich, *Phys. Rev. Lett.* **7**, 118 (1961).
- [19] N. Bloembergen, *Nonlinear Optics*, Benjamin, New York, 1964.
- [20] A. Braun, G. Korn, X. Liu, D. Du, J. Squier, and G. Mourou, *Opt. Lett.*, **20** (1), 73-75 (1995).
- [21] S. Tzortakis, G. Mechain et. al., *Opt. Lett.* **27** (21), 1944-1946 (2002).
- [22] D. J. Korteweg, G de Vries, *Phil. Mag.* **39**, 442 (1895).
- [23] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, 4th ed. (Academic, 2007).
- [24] S.A. Akhmanov and R.V. Khokhlov, *Problems of Nonlinear Optics*, Gordon and Breach, New York (1972).
- [25] L. M. Kovachev and K. L. Kovachev, *Laser Pulses / Book 1*, chapter, InTech, 2011.
- [26] L. M. Kovachev and K. L. Kovachev, *Proc. of SPIE*, v 7751, 2010.
- [27] L.M. Kovachev, K.L. Kovachev, *Journal of Opt. Soc. Am. A*, Vol. **25** (9), pp. 2232-2243 (2008); “Erratum “, *Journal of Opt. Soc. Am. A*, Vol. **25**, 12, pp. 3097-3098 (2008).
- [28] I. Stefanov, S. Yazadjiev and M. Todorov, *Phys. Rev. D* **75** 084036 (2007).
- [29] Th. Sotiriou, V. Faraoni and St. Liberati, *Int. J. Mod. Phys. D* **17** (2008) 399.
- [30] V. Faraoni and Sh. Nadeau, *Phys. Rev. D* **75** (2007) 023501.
- [31] Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков, *Численные методы*, Бином, 2003.
- [32] J. Katz, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **183** (1978) 765.
- [33] R. Sorkin, *Astrophys. J.* **249** (1981) 254.
- [34] R. D. Sorkin, *Astrophys. J.* **257** (1982) 847.
- [35] G. Arcioni and E. Lozano-Tellechea, *Phys. Rev. D* **72** (2005) 104021.
- [36] J. Katz, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **189** (1979) 817.
- [37] Th. Helbig, *Astrophys. J.* **382** (1991) 223.
- [39] I. Stefanov, S. Yazadjiev and M. Todorov, *Class. Quantum Gravity* **26** (2009) 015006.
- [40] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Interscience, New York, 1962; Gostekhizdat, Moscow, (1941).
- [41] V. S. Vladimirov, *Equations of Mathematical Physics*, 2nd ed., Nauka, Moscow, (1971); Dekker, New York, (1971).
- [42] P. Saari, *Optics Express* **8**, 590-598 (2001).
- [43] H. Euler and Kockel, *Naturewiss* **23**, 246 (1935).
- [44] W. Heisenberg and H. Euler, *Z. Phys.* **98**, 714 (1936).
- [45] A. Bernstein, M. McCormick, G. Dyer, J. Sanders, and T. Ditmire, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 123902 (2009).
- [46] Y. Liu, M. Durand, S. Chen, A. Houard, B. Prade, B. Forestier, A. Mysyrowicz, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 055003 (2010).
- [47] P. Ding, Z. Guo, X. Wang, Y. Cao, M. Sun, P. Zhao, Y. Shi, S. Sun, X. Liu and B. Hu, *Optics Express*, **21**, 27631-27641 (2013).
- [48] R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, Academic Press, New York, 2003.
- [49] S. L. Chin et al., *Can. J. Phys.* **83**, 863-905 (2005).
- [50] A. Couairon, and A. Mysyrowicz, *Physics Reports*, **441**, 47-189 (2007).
- [51]. M. Durand et al., *Optics Express*, **21**, 26836, (2013).
- [52] P. D. Maker and R. W. Terhune, *Phys. Rev. A* **137**, 801 (1965).

- [53] M. Kolesik, J. V. Moloney, *Optics Express*, **16**, 2971 (2008).
 [54] L. M. Kovachev, *J. Mod. Opt.*, **56**, 1797 - 1803 (2009).
 [55] M. Kolesik, J. V. Moloney, *Optics Express*, **16**, 2971 (2008).
 [56] A. H. Sheinfux, E. Schleifer, J. Papeer, G. Gibich, B. Ilan, and A. Zigler, *Applied Physics Letters* **101**, 201105 (2012).
 [57] R. Wang et al., *Optics Express* **20**, 14168 (2012).

Abstract

PHD Thesis: Numerical and analytical investigation of some nonlinear problems of physics *Basic results and contributions of the PHD thesis*

1) Numerical solutions, describing magnetically charged black holes coupled to nonlinear Born-Infeld nonlinear electrodynamics in scalar-tensor theories of gravity with massive scalar field are obtained. Static, spherically symmetric space-time is considered. The structure of black holes is analyzed. Solutions with one horizon, two horizons and degenerate event horizon are found. The solutions are stable against spherically symmetric perturbations. Arguments in favour of the general stability of the solutions coming from the application of the “turning point” method are also presented. All analytical results for the qualitative behaviour of the functions have been confirmed by the numerical results.

2) New class of spherically-symmetric solutions with finite energy of the linear wave equation is obtained. The Courant-Hilbert *ansatz* is used and in this way the linear wave equation is reduced to semi-parabolic type diffraction equation for the envelope. The so posed initial value problem is correct. The solutions spread radially forming inside and outside wave fronts. The initial amplitude of the exact solutions decreases and the energy density distributes over whole space for a finite time.

3) The propagation of broad-band optical pulses in nonlinear vacuum in the frame of a system of nonlinear wave vector equations is investigated. The system is solved by using the method of separation of variables in pseudo-spherical coordinates. The obtained exact vector solution presents spherical shock wave and admits own angular momentum $l = 1$ for the electrical components. The shock wave preserves its amplitude maximum and self-compresses itself in r -direction.

4) Nonparaxial vector model in order to describe the recent experimental demonstrations of energy exchange between two non-collinear filaments with same carrying frequency crossing at small angle is developed. The filaments propagate in air with power close to P_{cr} . New mechanism on the base of degenerate four-photon parametric (DFPP) processes is proposed. The numerical investigations confirm the experimental results of periodical energy exchange in the region of overlapping of the two pulses. We obtain also the observed in the experiments dependence of the initial energy transfer on the relative transverse velocity (crossing angle), intensity and initial phase difference (distance a). The influence of DFPP processes during the multi-filamental propagation is also investigated. Important experimental effect is that the number of filaments with power around P_{cr} decreases gradually with propagation distance. The theory developed by Boyd is extended to evolution equations for pairing of pulses due to DFPP mixing. The result from the collinear interaction is that one of the pulses is amplified, while the other one decreases in energy, enters in linear mode and vanishes. The presented model shows that the DFPP processes are a natural explanation of the reducing of number of the filaments with power close to P_{cr} .